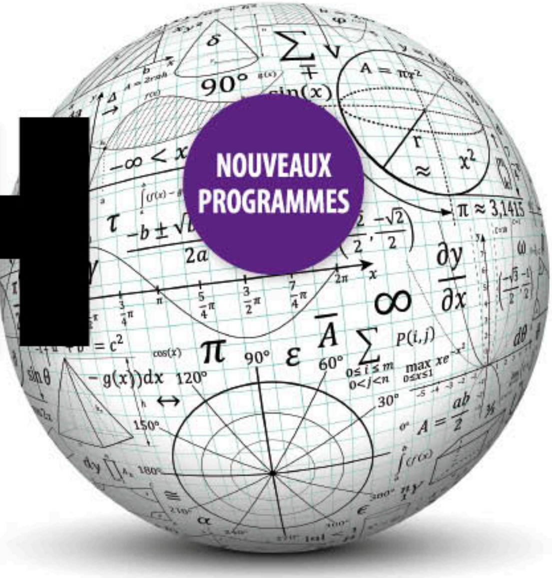
MATH MAX



NOUVEAUX PROGRAMMES

MATHS EXPERTES

Cours complet
Exercices et devoirs corrigés

Tle option

- **Le cours complet** avec des exemples et des conseils
- **Des centaines d'exercices et devoirs, tous corrigés** en détail
- Des cahiers de **logique** et d'**algorithmique**
- Des extras pour réviser ou **anticiper sur les années à venir**
- Une approche **testée et validée auprès des élèves**

ellipses

Chapitre I

NOMBRES COMPLEXES : ALGÈBRE

Sommaire

Introduction **7**
Une démarche « naturelle » 7
Bref historique 8
Utilité et légitimité des nombres complexes 8
1 Forme algébrique d'un nombre complexe **9**
1.1 Premières définitions 9
1.2 Calculs dans $\mathbb{C}$ 10
2 Conjugué d'un nombre complexe **11**
2.1 Définition 11
2.2 Conjugué et opérations 11
Exercices **12**
Corrigé des exercices 14

Introduction

Une démarche « naturelle »

L'équation $x+9=7$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle en a dans un ensemble plus grand : $\mathbb{Z}$ ($x=-2$). De même, l'équation $3x=1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, alors que dans un ensemble plus grand, $\mathbb{Q}$ par exemple, il y en a une : $x=\frac{1}{3}$. Et puis, l'équation $x^2=3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ pour en trouver ($x=\pm\sqrt{3}$). Bref, quand une équation n'a pas de solution, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand.

Au stade de vos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que vous ayez rencontré est $\mathbb{R}$. Pourtant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$... Nous allons donc dans ce chapitre « construire », ou plutôt imaginer, un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède des solutions. On le nommera $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes. Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté $\boldsymbol{i}$ (comme imaginaire). Le nombre i est tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$ c.-à-d. “ $i = \sqrt{-1}$ ” ! L'équation ci-dessus possède alors deux solutions dans $\mathbb{C}$: $x^2 + 1 = 0 \iff x^2 - i^2 = 0 \iff (x - i)(x + i) = 0$ donc $x = i$ ou $x = -i$.

Bref historique

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XVIe s. avec une première apparition dans l'œuvre de Jérôme Cardan d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle *sophistiqué*. Le mathématicien italien Rafaele Bombelli met ensuite en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors *impossibles* avant de leur donner le nom d'*imaginaires*.

Durant trois siècles, ces nombres sont regardés avec méfiance, n'en étant pas vraiment mais permettant des raccourcis intéressants tant en algèbre que dans le tout nouveau calcul infinitésimal. Au XVIIIe s., Leonhard Euler introduit, après e, la notation i et établit la forme exponentielle d'un nombre complexe. Les mathématiciens tentent alors avec audace de généraliser les fonctions de la variable réelle à la variable imaginaire, tantôt avec succès (exponentielle complexe), tantôt avec plus d'aléas (fonction racine n-ième, fonction logarithme complexe). Ce n'est qu'à partir du XIXe s. que se développe l'aspect géométrique des nombres complexes, vus comme des éléments ou des transformations du plan avec les travaux de Gauss et de Cauchy [†].

Utilité et légitimité des nombres complexes

Les nombres complexes permettent notamment de définir des solutions à toutes les équations polynomiales à coefficients réels. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni de l'application *module* qui généralise la valeur absolue des nombres réels, mais il ne peut pas être totalement ordonné de façon cohérente avec ses opérations, contrairement à $\mathbb{R}$.

En algèbre, le théorème de d'Alembert-Gauss identifie le degré d'un polynôme complexe non nul au nombre de ses racines complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité.

En analyse, l'exponentielle complexe permet par exemple l'étude des séries et de la transformée de Fourier [††] qui est, entre autres, à la base de tout traitement de signal et donc de l'électronique. La branche de l'*analyse complexe* concerne l'étude des fonctions de variables complexes, dérivables au sens complexe, appelées fonctions holomorphes.

---

†. Fantastique mathématicien dont le nom est inscrit sur la non moins fantastique tour Eiffel.

††. Mémorable mathématicien dont le nom est inscrit sur la non moins mémorable tour Eiffel.

En géométrie, les nombres complexes permettent par exemple de décrire et étudier facilement les transformations du plan. Ils ouvrent aussi tout un pan de l'étude des fractales avec les fameux ensembles de Mandelbrot et de Julia.

En physique, les nombres complexes sont utilisés pour décrire le comportement d'oscillateurs électriques, les phénomènes ondulatoires en électromagnétisme, à peu près tout ce qui oscille.
Par ailleurs, la mécanique quantique nécessite l'utilisation des nombres complexes et selon certaines théories, la dimension *imaginaire* pourrait même correspondre à une réalité physique et ne pas être seulement une commodité d'écriture.

Leur utilité dans tous les domaines de l'algèbre et de l'analyse ainsi que l'utilisation qu'en font les physiciens, tant en optique qu'en électricité et électromagnétisme, en font des outils essentiels des sciences mathématiques et physiques.

1 Forme algébrique d'un nombre complexe

1.1 Premières définitions

Le théorème suivant, que l'on admettra, définit l'ensemble des nombres complexes.

Théorème 1 *Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments, appelés nombres complexes, tel que :*

- $\mathbb{C}$ *contient l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels.*
- $\mathbb{C}$ *contient un élément i tel que* $\boldsymbol{i^2 = -1}$.
- $\mathbb{C}$ *est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des* ***règles de calculs analogues*** *à celles de l'addition et de la multiplication dans* $\mathbb{R}$.
- *Tout nombre complexe z s'écrit de manière* ***unique*** *sous la forme* $\boldsymbol{z = a+ib}$ *où a et b sont deux nombres réels. Cette écriture s'appelle la* ***forme algébrique*** *du nombre complexe z.*

Définition 1 *Si* $z = a + ib \in \mathbb{C}$,

- *On appelle a,* *la* ***partie réelle*** *de z* *et l'on note* $a = \mathfrak{Re}(z)$.
- *On appelle b,* *la* ***partie imaginaire*** *de z* *et l'on note* $b = \mathfrak{Im}(z)$.
- *Si* $\mathfrak{Re}(z) = 0$, *on dit que* $z = ib$ *est* ***imaginaire pur*** *et l'on note* $z \in i\mathbb{R}$.

Exemples : $3 - 2i \in \mathbb{C}$, $\sqrt{5} + i\pi \in \mathbb{C}$, $7 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\frac{i}{3} \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Remarques : • On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et les réels sont précisément les nombres complexes de partie imaginaire nulle :

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \;/\; \mathfrak{Im}(z) = 0\} = \{z = a + ib \in \mathbb{C} \;/\; b = 0\}.$$

• Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire : $a + ib = a' + ib' \iff a = a'$ et $b = b'$.

• En particulier, $z = 0\,(\in \mathbb{R}) \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z) = 0$.

1.2 Calculs dans $\mathbb{C}$

Commençons par tenter ce qui suit, pour voir :

◦ $(2+4i)+(5-7i)=(5+2)+(4i-7i)=7-3i$.

◦ $(3-2i)(4+5i)=12+15i-8i-2i.5i=12-10i^2+7i=12-10(-1)+7i=22+7i$.

◦ $\frac{1}{3+2i}=\frac{1}{3+2i}\times\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{3-2i}{3^2-(2i)^2}=\frac{3-2i}{9-4i^2}=\frac{3-2i}{9+4}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}\,i$

Le théorème 1 justifie les règles de calcul suivantes.

Propriété 1 *Pour tous nombres complexes* $z=a+ib$ *et* $z'=a'+ib'$,

- $\boldsymbol{z+z'} = (a+ib)+(a'+ib') = \boldsymbol{(a+a')+i(b+b')}$.
- $\boldsymbol{zz'} = (a+ib)(a'+ib') = aa'+iab'+ia'b+i^2bb' = \boldsymbol{(aa'-bb')+i(a'b+ab')}$.
- *Si* $z\neq 0$, $\quad \boldsymbol{\frac{1}{z}} = \frac{1}{a+ib}\times\frac{a-ib}{a-ib}=\frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \boldsymbol{\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}}$
- *Si* $z\neq 0$, $\quad \boldsymbol{\frac{z'}{z} = z'\times\frac{1}{z}}$.

Définition 2 *L'**opposé** d'un nombre complexe* $z=a+ib$ *est le nombre complexe* $-z=-a-ib$.

<u>*Remarque*</u> : Si $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda z=\lambda a+i\lambda b$ *i.e.* $\mathfrak{Re}(\lambda z)=\lambda\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(\lambda z)=\lambda\mathfrak{Im}(z)$.

Exemples : ◦ $(3-5i)+(-2+3i)=1-2i$.

◦ $(8-i)+(-8+i)=(8-i)-(8-i)=0$.

◦ $(3+2i)(1-i)=3-3i+2i-2i^2=3-2(-1)-i=5-i$.

◦ $\frac{1}{7-3i}=\frac{1}{7-3i}\times\frac{7+3i}{7+3i}=\frac{7+3i}{7^2-(3i^2)}=\frac{7+3i}{49+9}=\frac{7}{58}+i\,\frac{3}{58}$.

◦ $\frac{3-4i}{5+2i}=\frac{3-4i}{5+2i}\times\frac{5-2i}{5-2i}=\frac{15-6i-20i+8i^2}{5^2-(2i)^2}=\frac{15-8-26i}{25-(-4)}=\frac{7}{29}-\frac{26}{29}\,i$.

◦ $\boldsymbol{\frac{1}{i}} = \frac{i}{i.i} = \frac{i}{-1} = \boldsymbol{-i}$.

Propriété 2 $\forall z,z'\in\mathbb{C}$ $\quad \boldsymbol{zz'=0} \iff \boldsymbol{z=0}$ *ou* $\boldsymbol{z'=0}$.

Démonstration : · Si $z=0$ alors $a=b=0$ donc $aa'-bb'=0$ et $a'b+ab'=0$ d'où $zz'=0$. De même si $z'=0$.

· Si $zz'=0$ alors $aa'-bb'=0$ et $a'b+ab'=0$.
Supposons $z\neq 0$. Si $a\neq 0$, on a $a'=\frac{bb'}{a}$ et $\frac{bb'}{a}\times b+ab'=0$ donc $b'(\frac{b^2}{a}+a)=0 \implies b'(a^2+b^2)=0 \implies b'=0$ $(z\neq 0)$ d'où $a'=\frac{bb'}{a}=0$ et $z'=0$.
Si $a=0$, $b\neq 0$ et il suffit d'écrire $b'=\frac{aa'}{b}$. □

Les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité de l'addition et de la multiplication des nombres complexes sont encore vérifiées. Il en résulte les identités remarquables suivantes.

- $(a+ib)^2=(a^2-b^2)+i(2ab)$
- $(a-ib)^2=(a^2-b^2)-i(2ab)$
- $\boldsymbol{(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2}$ $(\in\mathbb{R}^+)$

Exemples : ∘ $(4+3i)^2 = 4^2 - 3^2 + 2\times 4\times 3i = 7+24i$.
∘ $(7-i)^2 = 7^2 - 1^2 - 2\times 7\times 1 = 48 - 14i$.
∘ $(8-2i)(2i+8) = 8^2 + 2^2 = 68$.

Le mode complexe de la calculatrice (mode, $a+ib$) peut vous permettre de vérifier vos résultats.

2 Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définition

Définition 3 *Le **conjugué** d'un nombre complexe* $z = a+ib$ *est le nombre complexe* $\boldsymbol{\overline{z} = a - ib}$.

Exemples : ∘ $\overline{3+2i} = 3-2i$ ∘ $\overline{5-6i} = 5+6i$, ∘ $\overline{-4+i} = -4-i$,
∘ $\overline{-7i-\sqrt{3}} = 7i - \sqrt{3}$, ∘ $\overline{i\sqrt{2}} = -i\sqrt{2}$, ∘ $\overline{\pi} = \pi$.

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition du conjugué.

Propriété 3 $\boldsymbol{z + \overline{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z)}$ *et* $\boldsymbol{z - \overline{z} = 2\,i\,\mathfrak{Im}(z)}$
Ainsi, z *est réel* $\iff z = \overline{z}$ *et* z *est imaginaire pur* $\iff z = -\overline{z}$.

Propriété 4 *Pour tout* $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{z\overline{z} = a^2 + b^2}$ *et* $\boldsymbol{\overline{\overline{z}} = z}$.

Exemples : ∘ $(3+2i)\overline{(3+2i)} = 3^2 + 2^2 = 13$, ∘ $i\sqrt{2}\,\overline{i\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$,
∘ $(-7i-\sqrt{3})\overline{(-7i-\sqrt{3})} = \sqrt{3}^2 + 7^2 = 52$, ∘ $i\overline{i} = -i^2 = 1$.

<u>*Remarque*</u> : Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} \in \mathbb{R}^+$ et même $z\overline{z} > 0$ pour $z \neq 0$. On serait presque tenté de définir une fonction $\ln(z\overline{z})$ sur $\mathbb{C}^*$.

2.2 Conjugué et opérations

Propriété 5 *Pour tous nombres complexes* z *et* z' *et tout entier naturel* n *non nul, on a :* $\boldsymbol{\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$, $\boldsymbol{\overline{zz'} = \overline{z}\times\overline{z'}}$, $\boldsymbol{\overline{z^n} = (\overline{z})^n}$.

Si, de plus, $z \neq 0$, $\boldsymbol{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}}$ *et* $\boldsymbol{\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}}$

Démonstration : Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$. On a
· $\overline{z+z'} = \overline{(a+a') + i(b+b')} = (a+a') - i(b+b') = (a-ib) + (a'-ib') = \overline{z} + \overline{z'}$
· $zz' = [aa' - bb'] + i[a'b + ab']$
et $\overline{z}\times\overline{z'} = [aa' - (-b)(-b')] + i[a'(-b) + a(-b')] = [aa' - bb'] - i[a'b + ab'] = \overline{zz'}$.
· $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}\times\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$ et $\frac{1}{(\overline{z})} = \frac{1}{a-ib}\times\frac{a+ib}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$
· $\overline{z^n} = \overline{z\times z^{n-1}} = \overline{z}\times\overline{z^{n-1}}$ et une simple récurrence donne le résultat. □

Exemple : $\overline{z + i(\overline{z}-1)} = \overline{z} + \overline{i(\overline{z}-1)} = \overline{z} + \overline{i}\,\overline{\overline{z}-1} = \overline{z} - i(\overline{\overline{z}} - \overline{1}) = \overline{z} - i(z-1)$.

Exercices

Nombres complexes : algèbre

Exercice 1 Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

(a) $(-i)^2$
(b) $(2i)^2$
(c) i^3
(d) $3i(4+5i)$
(e) $(3+i)(4-2i)$
(f) $(6-i)^2$
(g) $(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$
(h) $(\sqrt{2}+2i)^4$
(i) $(1+i)(4-3i)(1-i)$
(j) $-i(2+3i)(1-i)(-3+2i)$
(k) $\dfrac{2}{1+i}$
(l) $\dfrac{4i}{2-3i}$
(m) $\dfrac{2-5i}{3+2i}$
(n) $\dfrac{2i-\sqrt{2}}{3+i}$
(o) $\dfrac{2}{1-2i}+\dfrac{3}{2+i}$

Exercice 2 Donner une forme algébrique du conjugué des nombres complexes suivants.

(a) $2+5i$
(b) $i-\sqrt{2}$
(c) $\dfrac{2-i}{2i+1}$
(d) $(3-2i)(i+1)$
(e) $\frac{3}{2}i(1+\frac{1}{2}i)-\frac{1}{2}(2i+1)$

Exercice 3 On note $z_1=\dfrac{2i+1}{i+2}$ et $z_2=\dfrac{1-2i}{2-i}$.

1. Sans calcul, justifier que z_1+z_2 est réel et que z_1-z_2 est imaginaire pur.
2. Retrouver ces résultats par le calcul.

Exercice 4 Écrire en fonction de $\overline{z}$ le conjugué des nombres complexes suivants.

(a) $-2i+3z$
(b) $3+i-2iz$
(c) $(2-iz)(2z-4+3i)$
(d) $\dfrac{2i+1-iz}{5i+2z}$

Exercice 5 Soit $z\in\mathbb{C}^*$. Les nombres suivants appartiennent-ils à $\mathbb{R}$, à $i\mathbb{R}$ ou à aucun des deux ?

$a = z+\overline{z}$
$b = z-\overline{z}$
$c = z^2+\overline{z}^2$
$d = z^2-\overline{z}^2$
$e = z^3-\overline{z}^3$
$f = \frac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}$ $(z\notin\mathbb{R})$
$g = \frac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}$ $(z\notin i\mathbb{R})$
$h = \frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$
$j = \frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}$
$k = \frac{z^2+\overline{z}^2}{z\overline{z}}$
$l = \frac{z^2-\overline{z}^2}{z\overline{z}}$

Exercice 6 Ordre dans $\mathbb{C}$

Supposons que l'on puisse comparer deux nombres complexes de la même manière qu'avec deux réels. Qui serait le plus grand, i ou 0 ? Montrer qu'aucun cas de figure n'est possible sachant que $-1 < 1$.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes.

(a) $iz = 3 + i$

(b) $(2 - i)z - 2i = iz + 2 - 3i$

(c) $\dfrac{z - 2i}{z + 2} = 4i$

(d) $4\overline{z} + 2i - 4 = 0$

(e) $2z + i\overline{z} = 4$

(f) $\dfrac{\overline{z} + i}{\overline{z} - i} = 1$

(g) $\dfrac{\overline{z} + i}{z - i} = 1$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants.

(a) $\left\{\begin{array}{lcl} 3z + z' & = & 2 - 5i \\ z - z' & = & -2 + i \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{lcl} 3z + z' & = & 5 + 2i \\ -z + z' & = & 1 - 2i \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{lcl} z - z' & = & 3 - 4i \\ \overline{z} + 2\overline{z'} & = & 8 - i \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{2}z + z' & = & 2 \\ \frac{1}{2}\overline{z} + i\,\overline{z'} & = & 0 \end{array}\right.$

Précipitez-vous en page 275 afin de réaliser le devoir n° 1.

EXERCICES

Corrigé des exercices

NOMBRES COMPLEXES : ALGÈBRE

Exercice 1 Forme algébrique.

(a) $(-i)^2 = i^2 = -1$

(b) $(2i)^2 = 2^2 i^2 = -4$

(c) $i^3 = i^2 i = -i$

(d) $3i(4+5i) = -15+12i$

(e) $(3+i)(4-2i) = 3\times 4 - 3\times 2i + 4i - 2i^2 = 14-2i$

(f) $(6-i)^2 = 6^2 + i^2 - 2\times 6i = 35-12i$

(g) $(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3}) = 2^2 + \sqrt{3}^2 = 7$

(h) $(\sqrt{2}+2i)^4 = [(\sqrt{2}+2i)^2]^2 = [\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}\times 2i + (2i)^2]^2 = [2-4+4i\sqrt{2}]^2$
$= (-2)^2 - 2\times 2\times 4i\sqrt{2} - (4\sqrt{2})^2 = 4 - 32 - 16i\sqrt{2} = -28-16i\sqrt{2}$

(i) $(1+i)(4-3i)(1-i) = (4-3i)(1-i^2) = 8-6i$

(j) $-i(2+3i)(1-i)(-3+2i) = -i(1-i)(-6+4i-9i-6) = -i(-12-5i+12i-5)$
$= -7i^2 - 17(-i) = 7+17i$

(k) $\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2}{1+1}(1-i) = 1-i$

(l) $\frac{4i}{2-3i} = \frac{4i(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{8i+12i^2}{2^2+3^2} = -\frac{12}{13} + \frac{8}{13}i$

(m) $\frac{2-5i}{3+2i} = \frac{2-5i}{3+2i}.\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{1}{13}(-4-19i)$

(n) $\frac{2i-\sqrt{2}}{3+i} = \frac{(2i-\sqrt{2})(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6i-2i^2-3\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{3^2-i^2} = \frac{2-3\sqrt{2}}{10} + \frac{6+\sqrt{2}}{10}i$

(o) $\frac{2}{1-2i} + \frac{3}{2+i} = \frac{2(1+2i)}{1^2+2^2} + \frac{3(2-i)}{2^2+1^2} = \frac{2+4i+6-3i}{5} = \frac{1}{5}(8+i)$

Exercice 2 Forme algébrique du conjugué.

(a) $\overline{2+5i} = 2-5i$

(b) $\overline{i-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}-i$

(c) $\overline{\left(\frac{2-i}{2i+1}\right)} = i$

(d) $\overline{(3-2i)(i+1)} = 5-i$

(e) $\overline{\frac{3}{2}i(1+\frac{1}{2}i) - \frac{1}{2}(2i+1)} = -\frac{5}{4} - \frac{1}{2}i$

Exercice 3 $z_1 = \frac{2i+1}{i+2}$ et $z_2 = \frac{1-2i}{2-i}$.

1. $\overline{z_1} = \overline{\left(\frac{2i+1}{i+2}\right)} = \frac{\overline{2i+1}}{\overline{i+2}} = \frac{1-2i}{2-i} = z_2$ donc $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} \in \mathbb{R}$ et $z_1 - z_2 = z_1 - \overline{z_1} \in i\mathbb{R}$
2. On a $z_1 \pm z_2 = \frac{2i+1}{i+2} \pm \frac{1-2i}{2-i} = \frac{(2i+1)(2-i)\pm(1-2i)(i+2)}{(i+2)(2-i)} = \frac{(4i+2+2-i)\pm(i+2+2-4i)}{2^2-i^2}$.
   Ainsi, $z_1 + z_2 = \frac{(4+3i)+(4-3i)}{5} = \frac{8}{5}$ et $z_1 - z_2 = \frac{(4+3i)-(4-3i)}{5} = \frac{6}{5}i$.