Kartable

1re

Spécialité

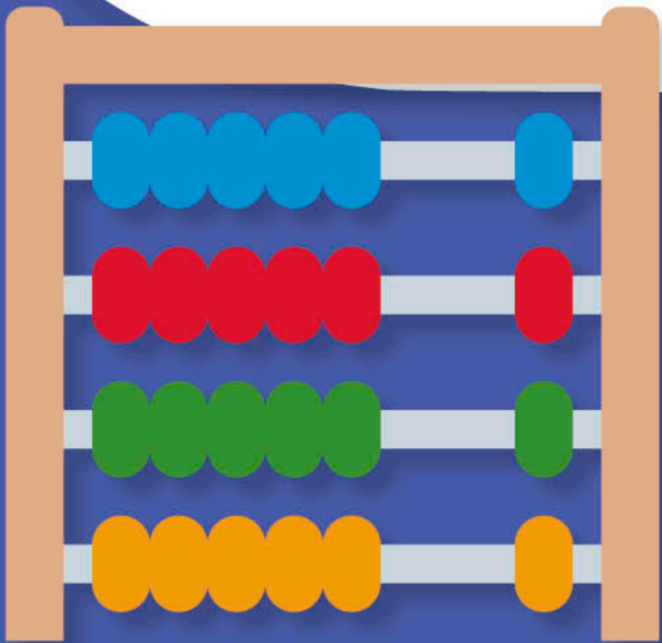
Maths

Cours

Savoir-faire

Exercices

Corrigés

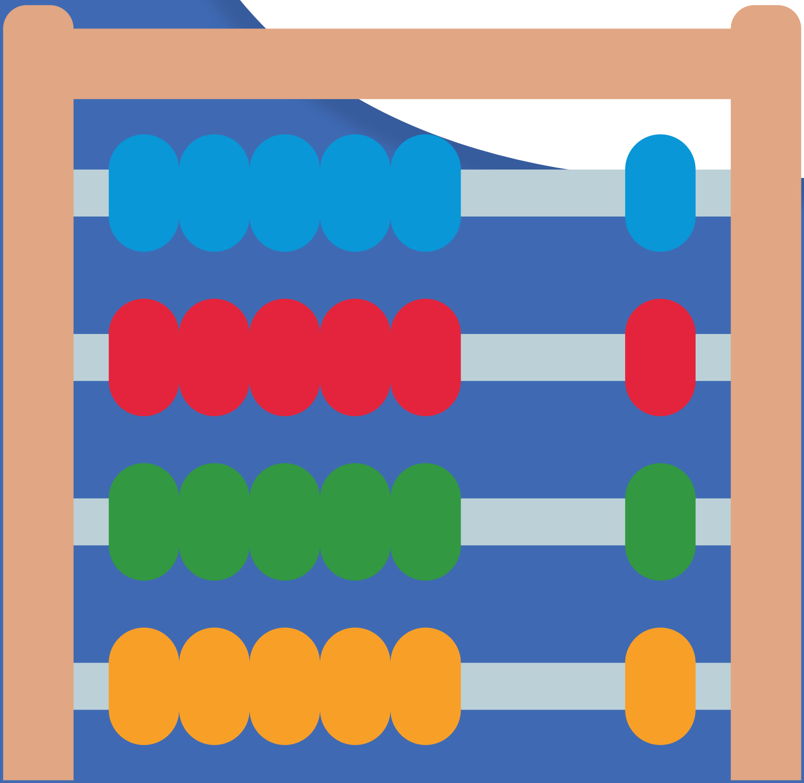


Encore plus d'exercices
sur www.kartable.fr

ellipses

THÈME 1

ALGÈBRE



Chapitre 1

Suites numériques

I Généralités sur les suites numériques

A Définitions

Définition **Suite numérique réelle**

Une **suite numérique réelle** est une fonction u qui à tout entier naturel n (ou tout entier supérieur à un certain entier naturel n_0), associe un réel : $u : n \mapsto u(n)$.

Définition **Terme d'indice**

$u(n)$ est le **terme d'indice** (ou de rang) n de la suite u, on le note également u_n.

Définition **Terme initial**

Le premier terme de la suite u, le **terme initial**, est u_0 ou plus généralement u_{n_0}, où

n_0 est le premier entier tel que le terme de la suite existe.

Définition **Suite de terme général**

On dit que (u_n) est la **suite de terme général** u_n.

■ Exemple

On considère la suite u définie de la façon suivante :

« Pour tout entier naturel n, le terme u_n est la troncature à 10^{-n} de $\sqrt{2}$. »

Dans ce cas, on a :

$u_0 = 1$,

$u_1 = 1{,}4$

$u_2 = 1{,}41$

$u_3 = 1{,}414\ldots$

On considère la suite v définie par $v_n = \sqrt{n-4}$. Dans ce cas, v_n n'existe qu'à partir de $n = 4$.

Le terme initial est $v_4 = \sqrt{4-4} = 0$.

Remarque

Lorsqu'une suite v n'est pas définie pour tous les entiers naturels, on peut la noter $(v_n)_{n \geq n_0}$, où n_0 est le premier indice de la suite.

Lorsqu'une suite n'est définie qu'à partir du terme $n = 1$, on écrit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, la suite v de terme général $v(n) = \sqrt{n-4}$ peut être notée comme $(v_n)_{n \geq 4}$.

Piège

Ne pas confondre « **terme** » et « **indice** ».

Exemple

Pour $u_3 = 1{,}414$, 1,414 est le **terme** d'**indice** 3 de la suite u.

Piège

Ne pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$.

u_{n+1} est le terme d'indice (ou de rang) $n + 1$, alors que $u_n + 1$ est le terme de rang n augmenté de 1.

B La génération d'une suite

1. La génération explicite

Définition **Explicite**

Une suite u définie sous forme **explicite** est donnée par son terme général exprimé en fonction de n.

On peut l'écrire comme $u_n = f(n)$, où f est une fonction.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 1$. Cette suite est définie de façon explicite.

Pour tout entier naturel n, on a $u_n = f(n)$ où f est la fonction affine $x \mapsto 2x - 1$.

Le calcul du terme d'indice 83, par exemple, est direct :

$u_{83} = f(83) = 2 \times 83 - 1 = 165$

2. La génération par une relation de récurrence

Définition **Relation de récurrence**

Une suite u définie par une **relation de récurrence** est donnée par son terme initial u_{n_0} **et** une relation reliant chaque terme au terme précédent.

On peut l'écrire comme $\begin{cases} u_{n_0} \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \end{cases}$, où f est une fonction.

Remarque

Dans ce cas, pour calculer un terme de la suite, il faut avoir calculé au préalable le terme précédent.

Exemple

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1, \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors on a $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction affine $x \mapsto 2x - 1$.

$u_1 = f(u_0) = f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$

$u_2 = f(u_1) = f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$

$u_3 = f(u_2) = f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9 \ldots$

3. La génération par un algorithme

Exemple

Le programme suivant (écrit en langage Python) définit une suite sur $\mathbb{N}$:

```
def u(n) :
        if n==int (n) and n>=0: #teste si n est un entier naturel
            if n%2==0: #teste si n est pair
                return (n/2) #valeur retournée si n est pair
            else:
                return (2*n-1) #valeur retournée si n est impair
        else: #message si n n'est pas un entier naturel
            print ("Vous n'avez pas choisi un entier naturel.")
```

En notant u_n le résultat obtenu en exécutant $u(n)$, on obtient :

n	0	1	2	3	4
u_n	0	1	1	5	2

L'algorithme donné correspond à la définition suivante de la suite u sur $\mathbb{N}$:

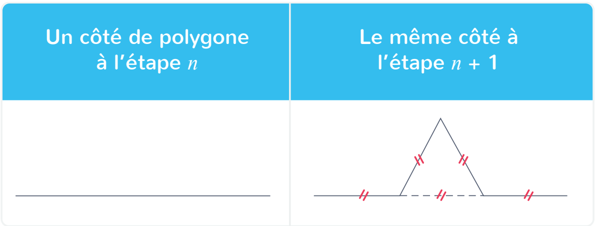
$$u_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 2n-1, \text{ sinon} \end{cases}$$

4. La génération par des motifs géométriques

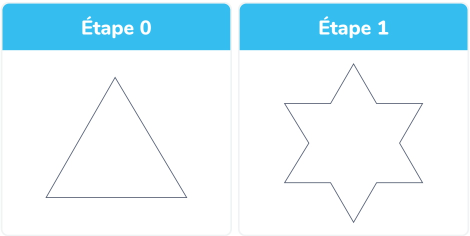
■ Exemple

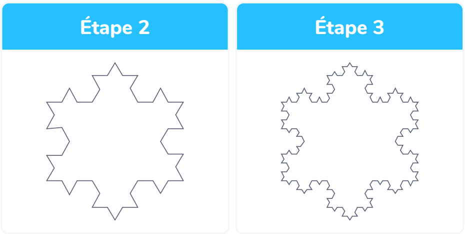
Le flocon de **Von Koch** est une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral par réitération d'une transformation appliquée à chaque côté de la figure.

1. À l'étape 0 (figure de départ), la figure est un triangle équilatéral.
2. Pour passer d'une étape n (avec $n \in \mathbb{N}$) à la suivante (étape $n+1$), on remplace chaque côté du polygone par une ligne brisée de 4 segments de longueur égale au tiers de la longueur des côtés du polygone obtenu à l'étape n en appliquant le procédé suivant :



On obtient ainsi les polygones suivants :





Si à chaque étape on associe le nombre de côtés de la figure, on définit une suite sur $\mathbb{N}$.

En notant c_n le nombre de côtés de la figure obtenue à l'étape n (où $n \in \mathbb{N}$), on obtient :

$c_0 = 3$,

$c_1 = 12$,

$c_2 = 48$,

$c_3 = 192$, etc.

C Le sens de variation d'une suite

Soit (u_n) une suite.

Définition **Croissante**

La suite u est **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n tel que u_n existe, $u_n \leq u_{n+1}$.

Remarque

On peut également définir une suite **strictement croissante** en remplaçant $\leq$ par $<$.

Définition **Décroissante**

La suite u est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n tel que u_n existe,

$u_n \geq u_{n+1}$.

Remarque

On peut également définir une suite **strictement décroissante** en remplaçant $\geq$ par $>$.

Définition **Constante**

La suite u est **constante** si et seulement si, pour tout entier naturel n tel que u_n existe, $u_n = u_{n+1}$.

Définition **Monotone**

La suite u est **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

D La représentation graphique d'une suite

1. La représentation d'une suite définie sous forme explicite

Propriété Soit u une suite définie à partir d'un certain rang n_0 par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[n_0;+\infty[$.

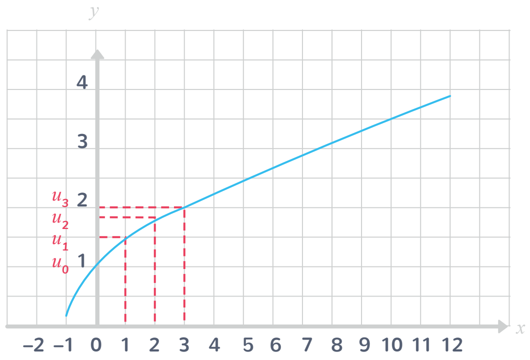
Pour tout $n \geq n_0$, u_n est l'ordonnée du point de la courbe représentative de f d'abscisse n.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \sqrt{n+1}$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

Pour tout entier naturel n, u_n est donc **l'ordonnée** du point d'abscisse n de la courbe représentative de f.



2. La représentation d'une suite définie par récurrence

Propriété Soit u une suite définie par récurrence à partir d'un certain rang n_0 par $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est une fonction définie sur un intervalle incluant les valeurs des termes de la suite. Pour tout $n \geq n_0$, u_{n+1} est l'ordonnée du point de la courbe de f d'abscisse u_n.

Exemple

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\sqrt{v_n+1}$.

On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=f(v_n)$ avec $f: x\mapsto\sqrt{x+1}$.

Pour tout entier naturel n, v_{n+1} est donc **l'ordonnée** du point d'abscisse v_n de la courbe de f.

Pour visualiser un terme sur l'axe des ordonnées, il faut donc déjà avoir le précédent sur l'axe des abscisses.

Astuce

Pour placer les différents termes de la suite sur l'axe des abscisses, on peut donc utiliser la droite d'équation $y=x$ qui permet de « ramener » sur l'axe des abscisses une valeur obtenue sur l'axe des ordonnées.
La droite d'équation $y=x$ permet de « passer » facilement d'un nombre qui est sur l'axe des ordonnées au même nombre sur l'axe des abscisses.

Exemple

Dans l'exemple précédent, $v_1=f(v_0)$. On a donc besoin de v_0 sur l'axe des abscisses pour pouvoir placer v_1 sur l'axe des ordonnées.
Puis $v_2=f(v_1)$. On a donc besoin de v_1 sur l'axe des abscisses.
La droite d'équation $y=x$ permet de relier facilement les points de coordonnées $(0;v_1)$, $(v_1;v_1)$ et $(v_1;0)$ et ainsi de placer v_1 sur l'axe des abscisses. On poursuit avec la même méthode pour les termes suivants.

II Les suites arithmétiques

A Définition d'une suite arithmétique

Définition **Suite arithmétique**

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n pour lequel u_n est défini, on a $u_{n+1}=u_n+r$.

Le réel r est appelé la **raison** de la suite.