Kartable

2de

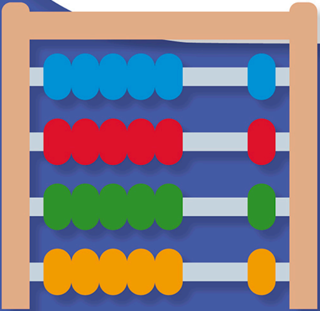
Maths

Cours

Savoir-faire

Exercices

Corrigés

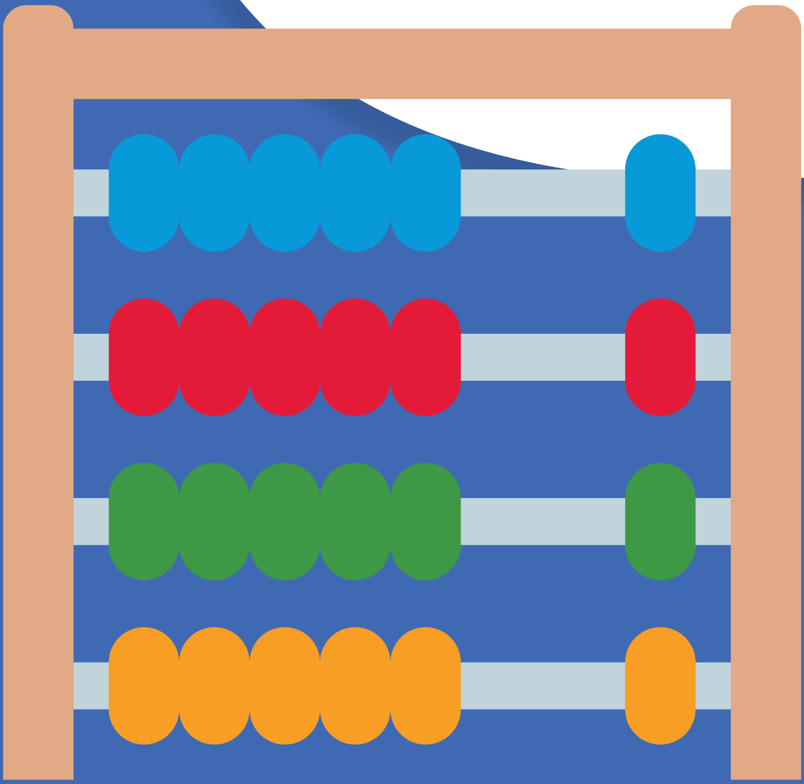


Encore plus d'exercices
sur www.kartable.fr

ellipses

THÈME 1

NOMBRES ET CALCULS



Chapitre 1

Les ensembles de nombres

I Les nombres entiers

A Les entiers naturels

Définition **Entier naturel**

Un entier naturel est un entier positif.

Exemple

0, 1, 2, 3 sont des entiers naturels.

Définition **Ensemble des entiers naturels**

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

Pour dire « n est un nombre entier naturel », on notera « $n \in \mathbb{N}$ ».

Propriété L'addition et la multiplication de deux entiers naturels donnent un entier naturel.

Exemple

$5+3=8$ est un entier naturel.

$5\times 3=15$ est un entier naturel.

✗ Piège

Cela ne fonctionne pas avec la soustraction ou la division.

Exemple

$2-5=-3$ n'est pas un entier naturel.

B Les entiers relatifs

Définition **Entier relatif**

Un entier relatif est un entier quelconque, positif ou négatif.

Exemple

0, 1, 2, 3 mais aussi -1, -2, -3 sont des entiers relatifs.

Définition **Ensemble des entiers relatifs**

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Pour dire « n est un nombre entier relatif », on notera « $n \in \mathbb{Z}$ ».

Remarque

Un entier naturel est un cas particulier d'entier relatif.

Propriété L'addition, la soustraction et la multiplication de deux entiers relatifs donnent un entier relatif.

Exemple

$5+(-3)=2$ est un entier relatif.

$2-3=-1$ est un entier relatif.

$2\times(-3)=-6$ est un entier relatif.

Piège

Le quotient de deux entiers relatifs n'est pas forcément un nombre relatif.

Exemple

$\dfrac{5}{(-2)}=-2{,}5$ n'est pas un entier relatif.

II Les nombres décimaux

Définition **Nombre décimal**

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exemple

1,32 est un nombre décimal.

Remarque

On dit qu'il a une **partie décimale** finie.

En multipliant un nombre décimal un certain nombre de fois par 10, on obtient un nombre entier. Un nombre décimal peut donc toujours s'écrire sous forme d'une fraction décimale (c'est-à-dire une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10).

Exemple

$1{,}32 = \dfrac{132}{100}$

Définition **Nombre décimal**

x est un **nombre décimal** si et seulement si il existe deux entiers relatifs k et p tels que :

$$x = \frac{k}{10^p}$$

Exemple

$\dfrac{3}{10}$ est un nombre décimal.

4 est un nombre décimal, car $4 = \dfrac{4}{1} = \dfrac{4}{10^0}$.

0,075 est un nombre décimal, car $0{,}075 = \dfrac{75}{1000} = \dfrac{75}{10^3}$.

$\dfrac{1}{3} = 0{,}3333...$ n'est pas un nombre décimal. Il a un nombre infini de chiffres après la virgule et on ne peut pas l'écrire sous forme de fraction décimale.

Piège

Ne pas confondre les puissances de 10 et les multiples de 10 :

- 10, 100, 1 000, 10 000, etc., sont des puissances de 10.
- 20, 30, 40, 50 ne sont pas des puissances de 10.

Remarque

Les nombres entiers sont des cas particuliers de nombres décimaux, leur partie décimale est nulle.

Définition **Ensemble des décimaux**

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Propriété L'addition, la soustraction et la multiplication de deux nombres décimaux donnent encore un nombre décimal.

Exemple

$\frac{5}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{15}{100}$ est un nombre décimal.

$1{,}2 + 2{,}4 - 3{,}57 = 0{,}03$ est un nombre décimal.

Piège

Le quotient de deux nombres décimaux n'est pas forcément un nombre décimal.

Exemple

$\frac{\frac{5}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{3} = 1{,}666666...$ n'est pas un nombre décimal.

III Les nombres rationnels

Certains nombres ont un nombre infini de chiffres après la virgule : ces nombres ne sont donc pas des nombres décimaux.

Néanmoins, qu'un nombre soit décimal ou pas, si on peut l'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs, on dit que ce nombre est **rationnel**.

Définition **Nombre rationnel**

Un nombre x est **rationnel si et seulement si** il existe **deux entiers relatifs** p et q tels que :

$$x = \frac{p}{q} \text{ (avec } q \neq 0\text{)}$$

Exemple

$\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel car c'est une fraction de deux entiers relatifs, 1 et 3.

$\frac{3{,}4}{5{,}2}$ est un nombre rationnel car $\frac{3{,}4}{5{,}2} = \frac{3{,}4 \times 10}{5{,}2 \times 10} = \frac{34}{52}$.

$0{,}346$ est un nombre rationnel car $0{,}346 = \frac{346}{1000}$.

-2 est un nombre rationnel car $-2 = \frac{-2}{1}$.

Les nombres décimaux sont des cas particuliers de nombres rationnels, puisque les puissances de 10 sont des entiers relatifs.

Définition **Ensemble des rationnels**

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Propriété Un nombre rationnel peut avoir une partie décimale finie ou infinie.

Lorsqu'un nombre rationnel a une partie décimale infinie, elle est périodique, c'est-à-dire que le même enchaînement de chiffres se répète à l'infini.

Exemple

$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285714285714285\ldots$ a un nombre infini de chiffres après la virgule, mais avec la période « 714285 » qui se répète à l'identique à l'infini.

Propriété L'addition, la soustraction, la multiplication et la division (sauf par 0) de deux nombres rationnels donnent encore un nombre rationnel.

Exemple

$\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{5}{3}=\frac{7}{21}+\frac{6}{21}-\frac{35}{21}=-\frac{22}{21}$ est un nombre rationnel.

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{1\times 2}{3\times 7}=\frac{2}{21}$ est un nombre rationnel.

$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{7}}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}=\frac{7}{6}$ est un nombre rationnel.

IV Les nombres irrationnels

Enfin, il existe des nombres dont la partie décimale est infinie et qui ne peuvent pas se mettre sous forme de quotient de deux entiers relatifs.

On dit que ces nombres sont **irrationnels**.

Définition **Nombre irrationnel**

Un nombre qui n'est **pas rationnel** est appelé un nombre **irrationnel.**

Exemple

π est un nombre irrationnel.

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

✖ Piège

Parmi les racines carrées des nombres entiers, seules celles des carrés parfaits sont des nombres rationnels. Toutes les autres racines carrées sont irrationnelles.

Exemple

$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ sont des nombres irrationnels car il n'existe pas de nombre entier dont le carré est égal à 3, 5 ou 6.

Mais $\sqrt{4}$ est rationnel, car 4 est un carré parfait :

$4 = 2^2$

Donc $\sqrt{4} = 2$.

Remarque

Les nombres irrationnels ont une partie décimale qui est infinie et qui n'est pas périodique, contrairement aux nombres rationnels.

Exemple

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504...$

Remarque

La période d'un nombre rationnel peut être parfois très grande. Il peut arriver que, par exemple, la calculatrice n'affiche pas de période tout simplement parce l'écran ne peut pas contenir assez de chiffres ! Pour démontrer qu'un nombre est irrationnel, il faut donc utiliser d'autres techniques.

V Les nombres réels

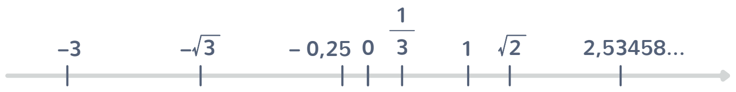
En regroupant l'ensemble des nombres que l'on vient de voir, on obtient l'ensemble des **nombres réels**.

On peut les représenter par des points sur un axe orienté.

De plus, à chaque point d'un axe orienté, on peut associer un unique nombre réel.

Définition **Ensemble des nombres réels**

L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisses des points d'un axe orienté que l'on appelle la « **droite des réels** ».



Droite des réels

VI Relation entre les ensembles

Propriété

Les ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres de la façon suivante :

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est inclus dans $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est inclus dans $\mathbb{D}$.
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est inclus dans $\mathbb{Q}$.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est inclus dans $\mathbb{R}$.

On peut écrire mathématiquement ces inclusions à l'aide du symbole $\subset$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$