



EN
CARTES
MENTALES

3^e

Brevet

MATHS

EN CARTES MENTALES

- » L'essentiel du cours
- » 28 cartes mentales
- » 102 exercices corrigés



ellipses

L'essentiel du cours

À la fin de ce chapitre je dois savoir :

- décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers ;
- simplifier une fraction pour la rendre irréductible ;
- modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité.

1 Nombres premiers

▶ 1.1. Rappels sur la division euclidienne

DÉFINITION

Soient deux nombres a et b , entiers positifs avec $b \neq 0$.

La division euclidienne de a par b c'est trouver l'unique couple $(q; r)$ tel que $a = b \times q + r$, avec $0 \leq r < b$.

On rappelle que, a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l} 706 & 21 \\ - 63 & 33 \\ \hline 76 & \\ - 63 & \\ \hline 13 & \end{array}$$

706 est le dividende, 21 le diviseur, 33 le quotient et 13 le reste.

Ainsi $706 = 21 \times 33 + 13$.

VOCABULAIRE

Soient a et b deux nombres entiers positifs non nuls. On dira que :

- a est un **multiple** de b ;
- a est **divisible** par b ;
- b est un **diviseur** de a ;
- b **divise** a ;

s'il existe un nombre entier positif k tel que $a = b \times k$. Ou encore, si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

EXEMPLES. 32 est un multiple de 4 car $32 = 4 \times 8$ et 8 est un nombre entier.
5 est un diviseur de 50 car $50 = 5 \times 10$ et 10 est un nombre entier.
Les diviseurs de 12 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.

Méthode pour poser une division euclidienne

1. On repère le diviseur, et le ou les premier(s) chiffre(s) en partant de la gauche du dividende. Par combien faut-il multiplier le diviseur pour obtenir le plus grand nombre inférieur ou égal au premier chiffre du dividende ? La réponse est le premier chiffre du quotient.
2. Multiplie le diviseur par le chiffre que tu viens de trouver, écris la réponse sous le ou les premier(s) chiffre(s) du dividende.
3. Soustrais-le ou les premier(s) chiffre(s) du dividende par le résultat de la multiplication.
4. Descends le chiffre suivant du dividende à côté du reste de la soustraction précédente.

On a maintenant un nouveau nombre avec lequel il faut recommencer toutes les étapes précédentes.



► CARTE MENTALE 1.1. Division euclidienne

► 1.2. Nombres premiers

DÉFINITION

Un **nombre premier** est un nombre qui n'est divisible que par un et lui-même. Autrement dit, un nombre est premier s'il a uniquement deux diviseurs : un et lui-même.

PROPRIÉTÉ

Il existe une infinité de nombres premiers.

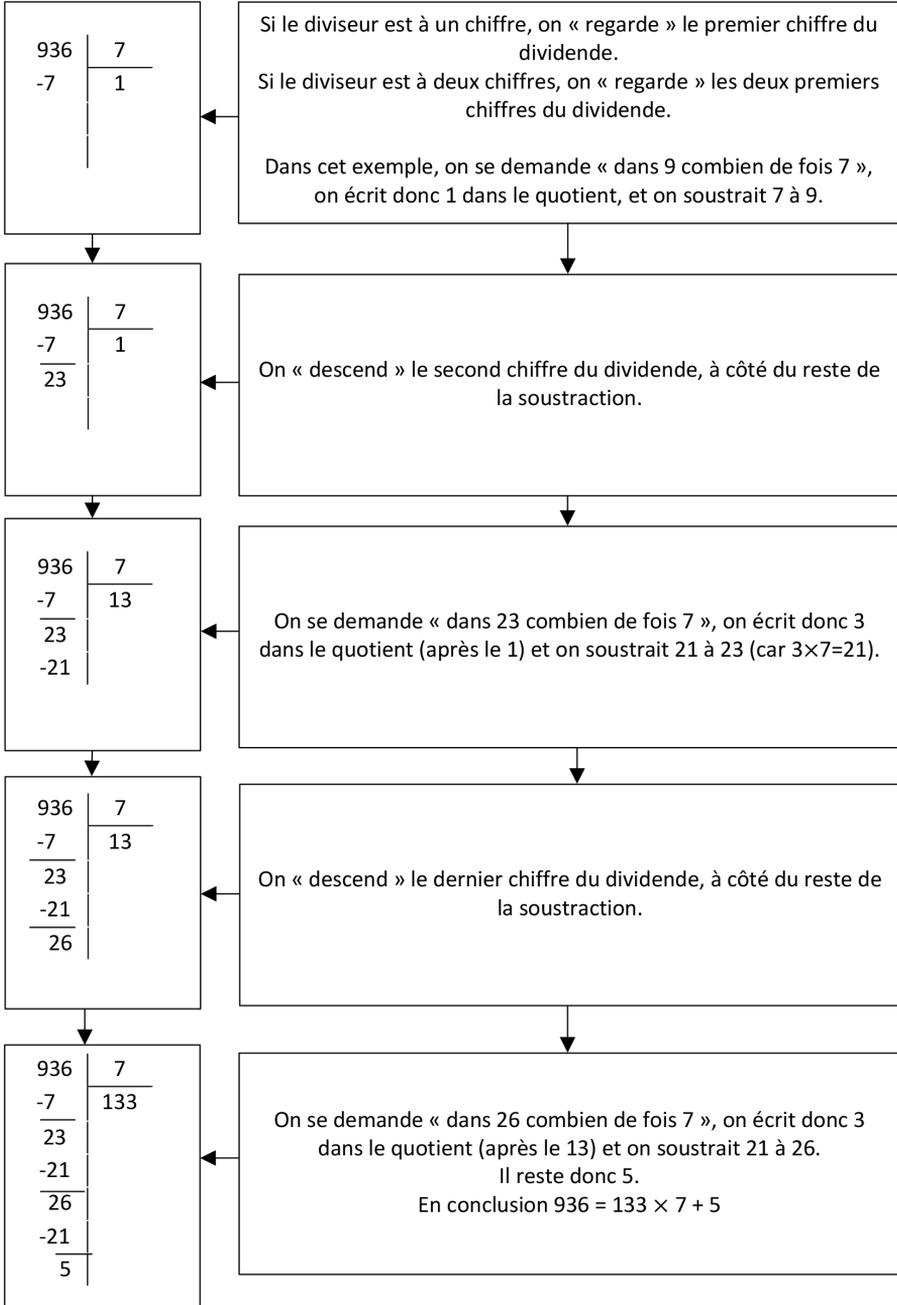
Méthode

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, pour montrer que n est premier il suffit de montrer que n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à \sqrt{n} .

EXEMPLE. Le nombre 151 est premier, car $\sqrt{151} \approx 12,3$, et 151 n'est pas divisible par 2 ; 3 ; 5 ; 7 et 11.



Division euclidienne



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Liste des nombres premiers entre 1 et 100.

Remarques

0 n'est pas premier, il possède une infinité de diviseurs.

1 n'est pas premier, car il possède un unique diviseur ; lui-même.

2 est le seul nombre premier pair, car tous les autres nombres pairs sont divisibles par 2.



► CARTE MENTALE 1.2. Critères de divisibilité

PROPRIÉTÉ

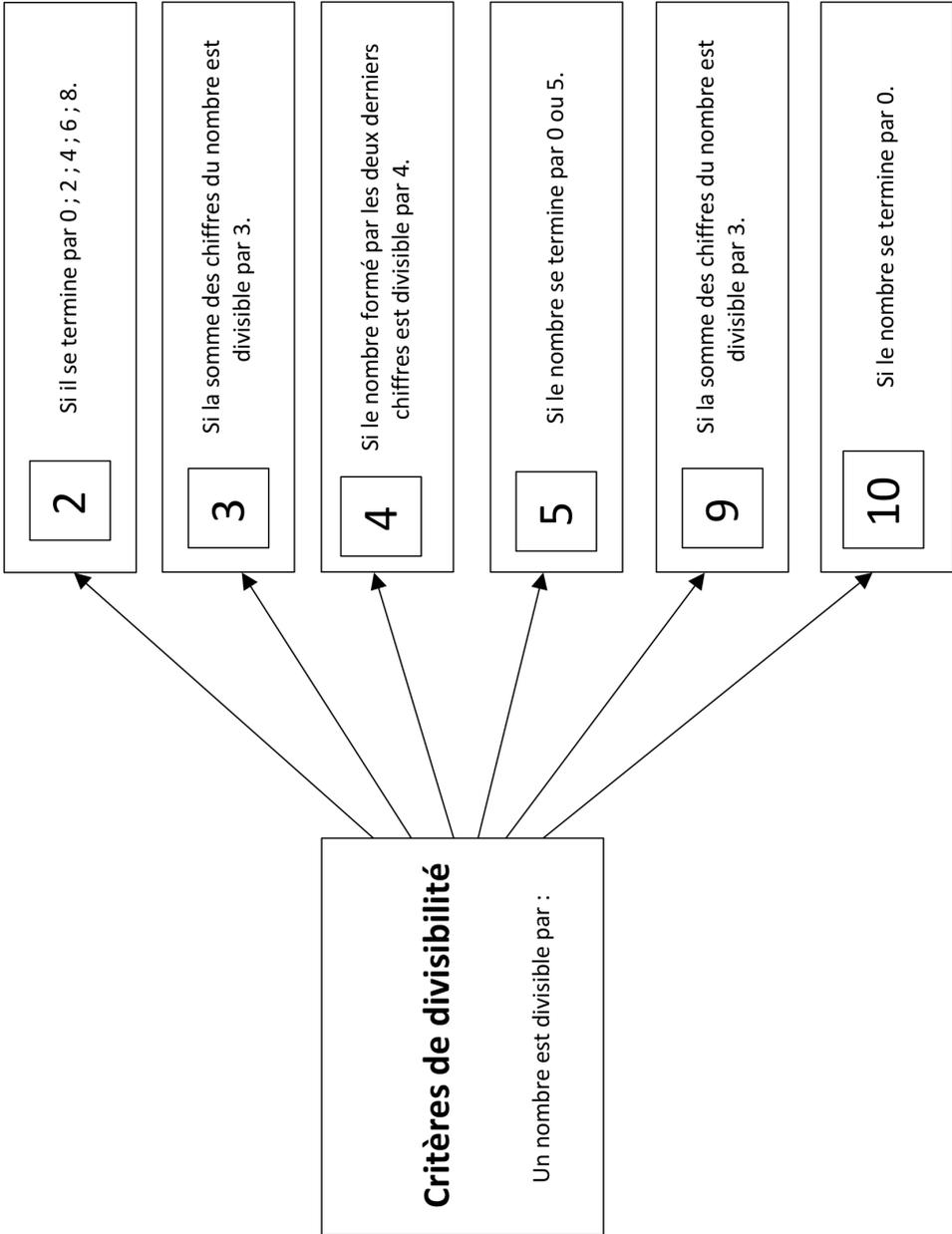
Chaque nombre peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.

EXEMPLES. $48 = 2^4 \times 3$.

$150 = 2 \times 3 \times 5^2$.

Pour décomposer un nombre en produits de facteurs premiers on peut utiliser la calculatrice, ou un algorithme représenté sous forme de tableau.

La méthode avec la calculatrice ne sera pas détaillée ici, en effet il existe différentes marques et modèles de calculatrices et je ne ferais de promotion pour aucune d'entre elles. Ainsi je vous invite à vous référer à la notice de votre calculatrice, ou à demander à votre professeur de mathématiques pour connaître la méthode.



Algorithme de décomposition

1. Trace une ligne verticale pour obtenir deux colonnes, dans la colonne de gauche écris le nombre entier à décomposer.
2. Dans la colonne de droite, écris le plus petit nombre premier qui peut diviser le nombre entier. Pour cela il faudra t'aider de tes critères de divisibilité.
3. Dans la colonne de gauche, écris le quotient (résultat) de la division précédente.
4. Dans la colonne de droite, écris le plus petit nombre premier qui peut diviser le quotient.
5. Dans la colonne de gauche, écris le nouveau quotient. Et ainsi de suite.

Il faudra répéter les étapes précédentes jusqu'à obtenir le chiffre un dans la colonne de gauche.

EXEMPLE.

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	FIN

Donc $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.



► CARTE MENTALE 1.3. Nombres premiers

2 Fraction irréductible

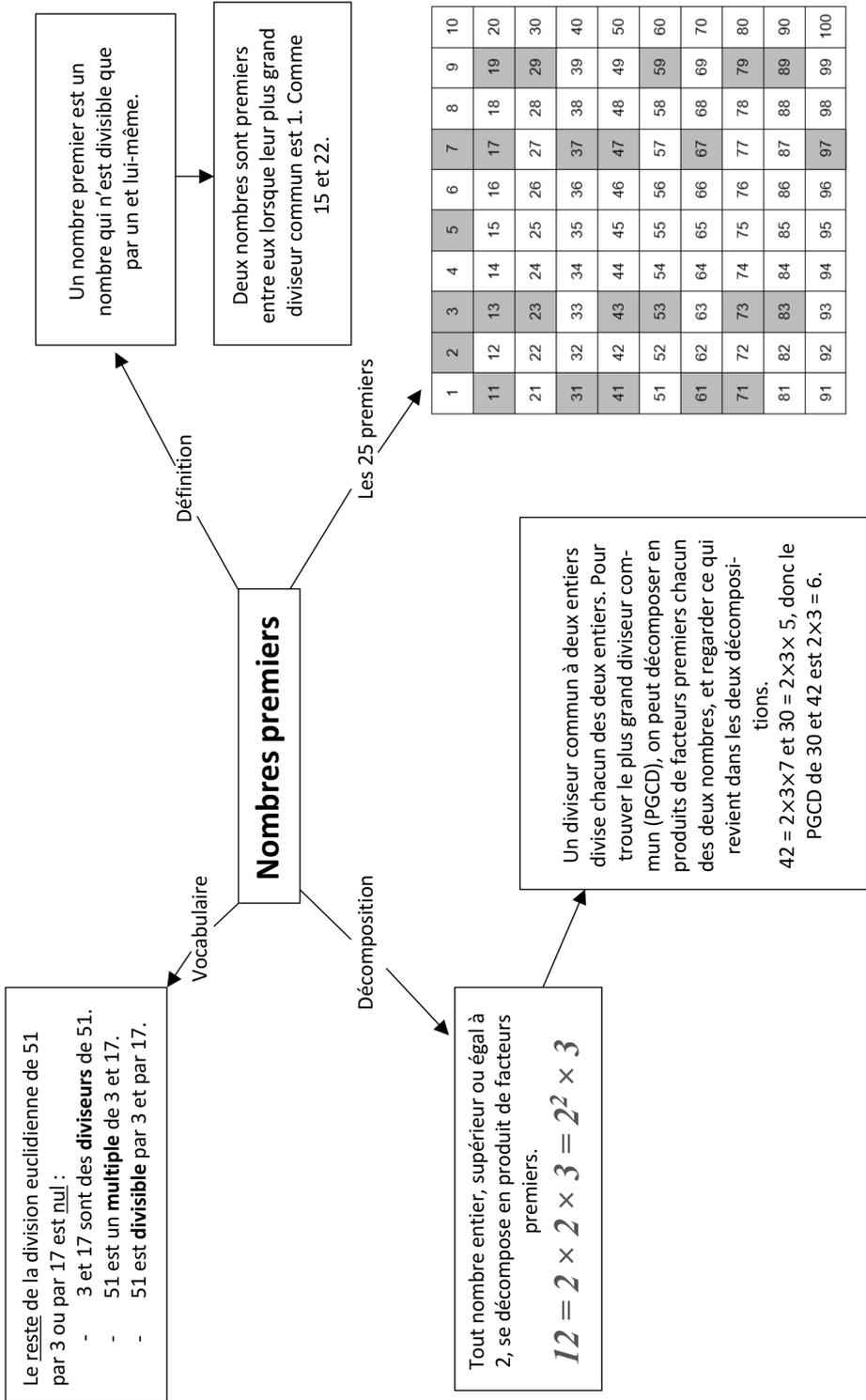
DÉFINITION

Deux nombres sont dit **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est un.

Méthode

Pour prouver que des nombres sont premiers entre eux, on peut écrire la liste de leurs diviseurs et remarquer qu'il n'y a que le chiffre un en commun dans les deux listes.

EXEMPLE. 18 et 35 sont premiers entre eux, car les diviseurs de 35 sont 1 ; 5 ; 7 ; 35 et les diviseurs de 18 sont 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18.



DÉFINITION

Une fraction est dite **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Méthode 1

On peut simplifier la fraction en écrivant différentes égalités. On utilise les critères de divisibilité, et on cherche par quel nombre commun sont divisibles le numérateur et le dénominateur.

EXEMPLE. $\frac{48}{36} = \frac{48 \div 2}{36 \div 2} = \frac{24}{18} = \frac{24 \div 2}{18 \div 2} = \frac{12}{9} = \frac{12 \div 3}{9 \div 3} = \frac{4}{3}$.

Méthode 2

On cherche les diviseurs communs au numérateur et au dénominateur. Et on divise par le plus grand diviseur commun (PGCD).

EXEMPLE. Les diviseurs de 48 sont 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48. Les diviseurs de 36 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36. Donc le plus grand commun diviseur de 48 et 36 est 12.

$$\frac{48}{36} = \frac{48 \div 12}{36 \div 12} = \frac{4}{3}$$

Méthode 3

Lorsque les nombres sont grands on utilisera plus efficacement la décomposition en facteurs premiers.

1. On décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers.
2. Dans chaque décomposition on peut surligner tout ce qui est en commun, ce qui représentera le plus grand diviseur commun des deux nombres.
3. On divise le numérateur et le dénominateur par ce plus grand diviseur.

EXEMPLE. Mettre la fraction $\frac{567}{450}$ sous forme irréductible.

$567 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$ et $450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$. Le plus grand diviseur commun est donc 9.

$$\frac{567}{450} = \frac{567 \div 9}{450 \div 9} = \frac{63}{50}$$



► CARTE MENTALE 1.4. Fractions irréductibles