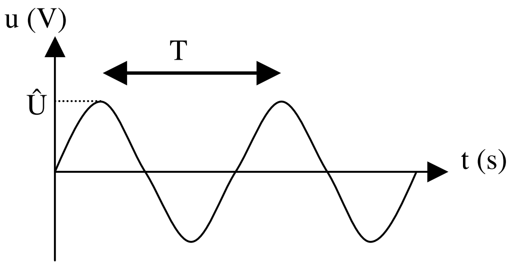
■ 1 ■

Circuits linéaire en régime sinusoïdal

LE REGIME SINUSOÏDAL

▶ Définitions

Le régime est sinusoïdal lorsque tension et courant sont des fonctions sinusoïdales du temps :



T : période (s)
f : fréquence (Hz)
ω : pulsation (rad/s)

Les valeurs instantanées d'une tension et d'un courant ont pour équation :

$u(t) = U\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi_u)$ et $i(t) = I\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi_i)$.

avec U et I correspondant aux valeurs efficaces de la tension et du courant, φ_u et φ_i aux phases à l'origine des temps.

La fréquence et la pulsation des signaux vérifient les relations :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega = 2\pi f}$$

▶ Valeur moyenne

La valeur moyenne d'un signal périodique se calcule à l'aide de la méthode des aires :

$< u >= \dfrac{A_1 + A_2}{T}$ avec A_1 aire de la partie positive du signal (positive)

A_2 aire de la partie négative du signal (négative).

Pour un signal sinusoïdal, la valeur moyenne est nulle : $\boxed{< u >= 0}$.

▶ **Valeur efficace**

La valeur efficace d'un signal est définie par la relation :

$$\boxed{U = \sqrt{< u^2 >}}$$

En régime sinusoïdal, les valeurs efficaces de la tension et du courant ont pour expression :

$$\boxed{U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}} \text{ et } \boxed{I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}}$$

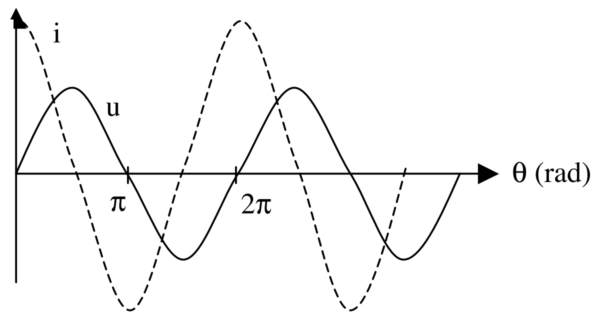
$\hat{U}$ et $\hat{I}$ correspondant aux valeurs maximales de la tension et du courant.

REPRESENTATION DES GRANDEURS SINUSOÏDALES

▶ **Représentation cartésienne**

u et i sont des fonctions sinusoïdales du temps.
Si on prend i comme origine des phases ($\varphi_i = 0$), et en notant φ le déphasage entre u et i, on peut écrire :
$i(t) = I\sqrt{2}\,\sin(\omega t)$ et $u(t) = U\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi)$.

On peut alors représenter u et i :



L'axe des abscisses peut être un axe de temps mais aussi un axe d'angle car une période représente 360° ou 2π rad.

On peut ainsi mesurer le déphasage entre u et i.

Dans l'exemple représenté ci-dessus, u est en retard de π/2 par rapport à i donc $\varphi = -\pi/2$.

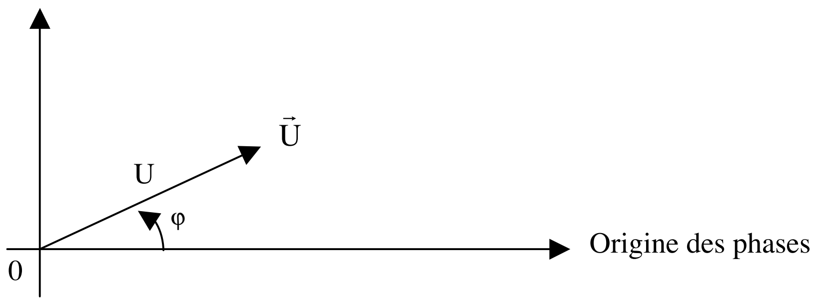
► **Représentation de Fresnel**

Intérêt : remplacer les calculs algébriques par une méthode graphique.

Principe : On associe à une grandeur sinusoïdale un vecteur de Fresnel.

A une fonction sinusoïdale du temps $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$, on associe un vecteur de Fresnel $\vec{U}$:

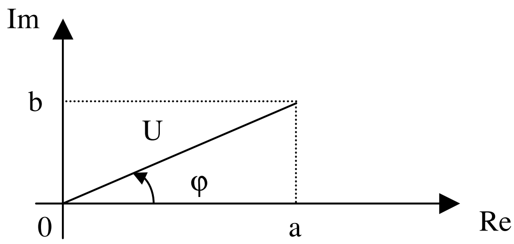
- dont la longueur est égale à la valeur efficace U
- faisant un angle φ avec l'origine des phases.



► **Notation complexe**

C'est une notation qui permet de simplifier considérablement les calculs.
A toute grandeur sinusoïdale, on peut associer un nombre complexe :
Exemple : $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{U} = (U, \varphi)$.

Rappels de mathématiques :



U : module
φ : phase
a : partie réelle
b : partie imaginaire

Un nombre complexe peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\underline{U} = (U\ ,\ \varphi)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{U} = a + j\,b}$$

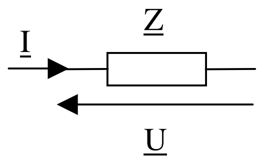
Relations importantes :

$$\boxed{\begin{array}{ll} a = U\cos\varphi & U = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b = U\sin\varphi & \tan\varphi = \dfrac{b}{a} \end{array}}$$

ETUDE DES DIPÔLES PASSIFS LINEAIRES

▸ Impédance complexe

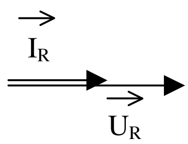
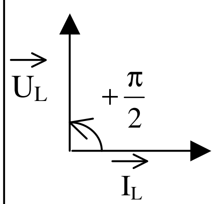
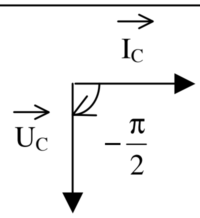
On définit l'impédance complexe d'un dipôle :



$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{(U\,;\varphi_u)}{(I\,;\varphi_i)} = (\frac{U}{I}\,;\varphi_u - \varphi_i)}$$

On appelle admittance complexe : $\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}}$

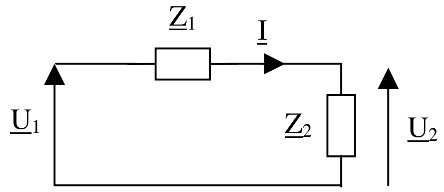
▸ Caractéristiques des 3 dipôles passifs élémentaires

DIPÔLE	RESISTANCE	BOBINE	CONDENSATEUR
Relations entre valeurs instantanées	$u_R = Ri_R$	$u_L = L\frac{di_L}{dt}$	$i_C = C\frac{du_C}{dt}$
Déphasage φ	$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = +\frac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$
Représentation de Fresnel			
Impédance	$\underline{Z_R} = R$	$\underline{Z_L} = jL\omega$	$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$
Admittance	$\underline{Y_R} = \frac{1}{R}$	$\underline{Y_L} = \frac{1}{jL\omega}$	$\underline{Y_C} = jC\omega$

THEOREMES FONDAMENTAUX

► Diviseur de tension

On considère un montage du type :

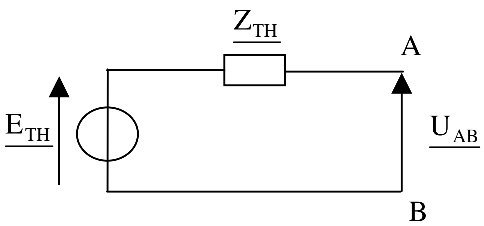


$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\,\underline{I} \quad \text{avec}\; \underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Donc : $$\boxed{\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\,\underline{U}_1}$$

► Théorème de Thévenin

Tout dipôle actif linéaire de bornes A et B peut être remplacé par un modèle équivalent de Thévenin :

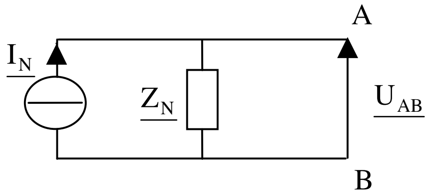


$\underline{E}_{TH} = (\underline{U}_{AB})_{vide}$

$\underline{Z}_{TH} = (\underline{Z}_{AB})_{\text{générateurs éteints}}$

► Théorème de Norton

Tout dipôle actif linéaire de bornes A et B peut être remplacé par un modèle équivalent de Norton :



$\underline{I}_N = (\underline{I}_{AB})_{\text{court-circuit}}$

$\underline{Z}_N = (\underline{Z}_{AB})_{\text{générateurs éteints}}$

► Théorème de superposition

La tension entre 2 points A et B d'un circuit électrique linéaire comportant plusieurs générateurs est égale à la somme des tensions obtenues entre les 2 points lorsque chaque source agit seule.

► Théorème de Millmann

On considère un nœud N auquel aboutissent i branches comportant chacune une conductance G_i et dont l'extrémité est au potentiel V_i.

Le potentiel d'un nœud N est alors donné par la relation : $V_n = \dfrac{\sum G_i V_i}{\sum G_i}$.

◣ Enoncés des exercices ◢

■ Exercice 1 .... (15 min)

1. Déterminer les nombres complexes associés aux grandeurs suivantes :

$$u_1(t) = 4\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) \qquad u_2(t) = 6\ \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

$$i_1(t) = 2\sqrt{2}\ \sin(\omega t) \qquad i_2(t) = 3\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \pi)$$

2. En déduire les impédances complexes des dipôles définis par :

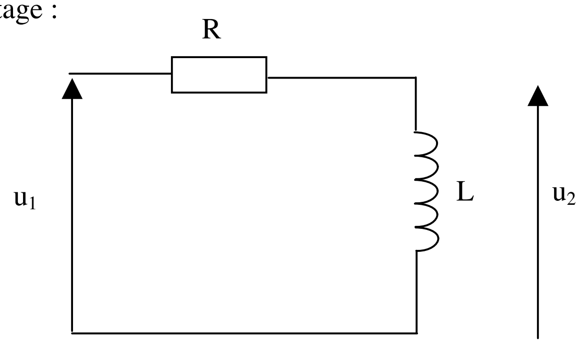
$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$$

3. Déterminer les grandeurs sinusoïdales associées aux nombres complexes :

$$\underline{U_3} = 3 - j \quad ; \quad \underline{U_4} = -5j \quad \text{et} \quad \underline{U_5} = -1$$

■ Exercice 2 .... (15 min)

Soit le montage :



1. u_1 est une tension sinusoïdale délivrée par un GBF.
Pourquoi peut-on utiliser la notation complexe ?
Exprimer $\underline{U}_2$ en fonction de $\underline{U}_1$.

2. Montrer que l'amplification du montage est $\underline{A_v} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$.

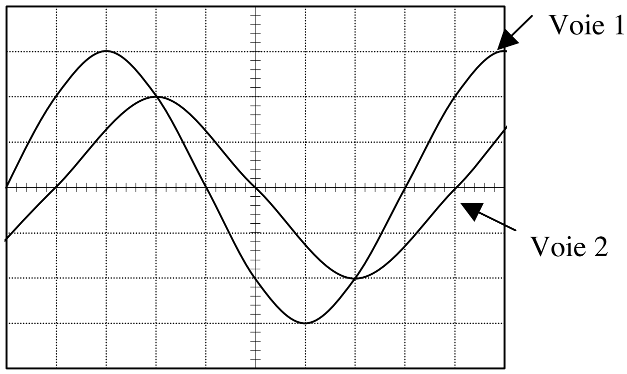
3. Déterminer les expressions du module et de l'argument de $\underline{A_v}$.

4. Que deviennent ces expressions lorsque la fréquence f :
- tend vers 0
- tend vers l'infinie.

Quelle est l'influence du circuit sur la tension u_1 dans ces 2 cas ?
Quelle est la fonction réalisée par ce circuit ?

■ Exercice 3 .... (20 min)

On considère les signaux u_1 (voie 1) et u_2 (voie 2) ci-dessous :

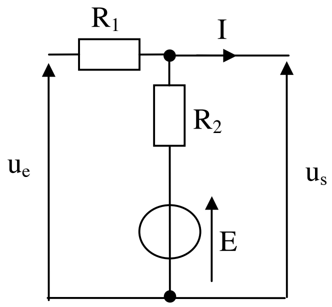


Calibres utilisés :
Voie 1 : 1 V / division ; Voie 2 : 5 V / division ;
Base temps : 2,5 ms/division.

1. Déterminer :
   - la période T des signaux ainsi que leur fréquence f
   - les valeurs maximale et les valeurs efficace de u_1 et u_2
   - le déphasage entre u_1 et u_2 en expliquant la méthode utilisée.
2. Tracer les vecteurs de Fresnel associés à u_1 et u_2 en prenant u_1 comme origine des phases.
3. Déterminer les nombres complexes $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ associés aux tensions u_1 et u_2
4. On définit la tension $u = u_1 + u_2$.
   Déterminer les caractéristiques de cette tension puis donner son expression sous forme instantanée.

■ Exercice 4 .... (15 min)

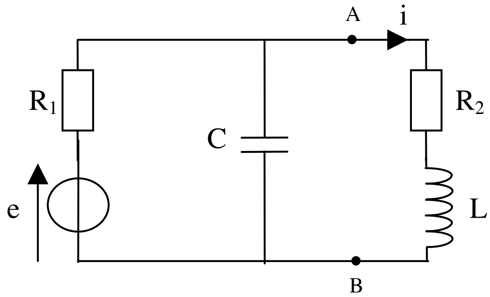
Soit le montage :



1. En utilisant le théorème de superposition puis le théorème de Millmann, donner l'expression de u_S en fonction de u_e, E, R_1 et R_2 lorsque le courant I débité est nul.
2. Que devient u_s si E = 0 ? Comment appelle-t-on ce montage ?

■■ Exercice 5 .... (25 min)

Un GBF délivre une tension e(t) sinusoïdale de valeur efficace E = 10 V et de fréquence 1 kHz.

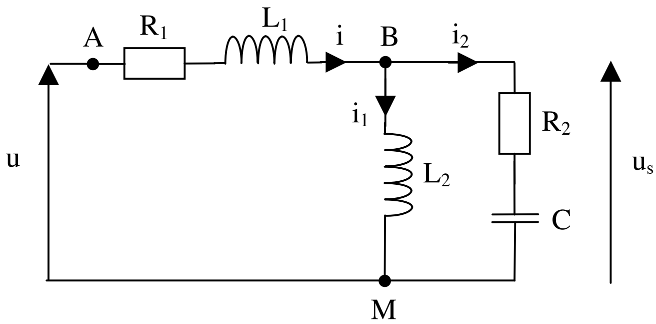


$R_1 = 47\ \Omega$
$R_2 = 10\ \Omega$
$L = 3$ mH
$C = 3\ \mu$F

1. Déterminer le modèle de Thévenin ($\underline{E}_{th}$, $\underline{Z}_{th}$) équivalent au dipôle AB.
2. Calculer les valeurs numériques de $\underline{E}_{th}$ et $\underline{Z}_{th}$ en choisissant e(t) comme origine des phases, c'est à dire que $\underline{E}$ = (10 ; 0).
3. Exprimer le courant $\underline{I}$ en notation complexe.
4. En déduire l'expression instantanée de i(t).

■■ Exercice 6 .... (30 min)

Le circuit ci-dessous est alimenté sous une tension $u(t) = 4\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$.



On donne :
$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 3\ \Omega$
$L_1\omega = 1\ \Omega$
$L_2\omega = 3\ \Omega$
$\dfrac{1}{C\omega} = 3\ \Omega$

1. Ecrire les impédances complexes équivalentes aux dipôles AB et BM.
2. Calculer l'impédance complexe de l'ensemble du circuit en la mettant sous la forme : $\underline{Z}$ = R + jX (Donner les valeurs de R et de X).
   Pour la suite de l'exercice, on prendra R = X = 4.
3. Exprimer u sous forme complexe.
4. Quelle est l'expression complexe $\underline{I}$ de l'intensité du courant fourni par l'alimentation ?
5. Représenter $\underline{U}$ et $\underline{I}$ dans un plan complexe en précisant le module et l'argument de ces signaux.
   Quel est le déphasage entre u et i ?
   Quelle est la nature du circuit ?