Chapitre 0
Introduction à la cinématique

Plan

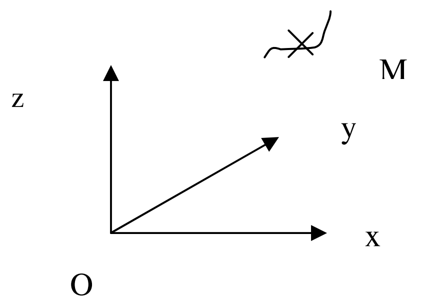
- *Vitesse, accélération*
- *Coordonnées polaires*
- *Exercices corrigés*

Vitesse, Accélération

La cinématique est l'étude du mouvement. Elle suppose donc l'existence à la fois d'au moins un mobile M et d'un observateur. On décrit le mouvement de ce mobile par rapport à l'observateur O qui est donc supposé fixe, en tenant compte des directions fixes qui définissent le référentiel d'observation de l'espace, un repère géométrique défini par une position O et des directions fixes orthogonales caractérisées par leurs vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. D'où l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans ce référentiel, avec les coordonnées x, y, z :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Et la figure correspondante :



On définit donc la trajectoire parcourue par le mobile M, c'est-à-dire une courbe, et le mouvement de ce mobile sur la trajectoire. On obtient donc les équations de la **trajectoire** qui sont données par deux équations, par exemple $y = f(x)$ et $z = g(x)$, les équations des projections de la courbe sur les deux plans de coordonnées xy et xz, et les **équations horaires** du mouvement, qui sont données par les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
On a donc deux perceptions de la trajectoire, l'une comme globalité, ensemble de points, l'autre comme une succession d'événements. La première perception définit la courbe comme l'intersection de deux surfaces définies par leurs expressions cartésiennes, ici les cylindres $y = f(x)$, de génératrice selon $\overrightarrow{Oz}$, et $z = g(x)$ de génératrice selon $\overrightarrow{Oy}$. Plus généralement, à trois dimensions, une courbe, un ensemble de points, est toujours définie comme l'intersection de deux surfaces. La seconde perception met en avant un paramètre, le temps, et est appelée

« **représentation paramétrique** de la courbe », elle donne ici les trois équations horaires de la courbe.
Une question simple concerne l'évolution du mobile, la vitesse du point M est définie comme la limite du vecteur vitesse moyenne :

$$\frac{\overrightarrow{MM'}}{\delta t}$$

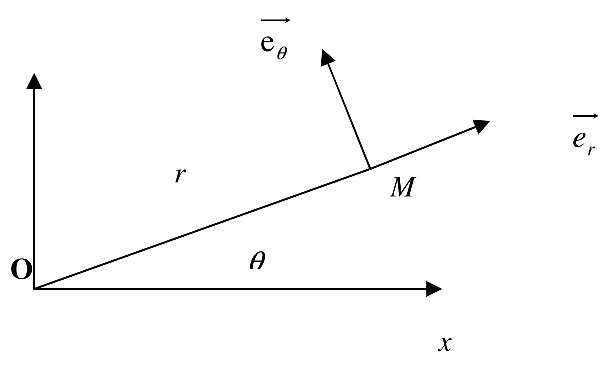
quand le temps δt qui sépare l'observation du mobile au point *M* et au temps t de l'observation du mobile au point *M'* et au temps $t + \delta t$ tend vers zéro. Evidemment le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est une corde de la trajectoire, donc la vitesse $\vec{V}$ est la limite de cette corde quand elle affleure la trajectoire, c'est donc un vecteur parallèle à la **tangente** au point M à la trajectoire. Bien sûr, ce vecteur $\vec{V}$ a une mesure qui correspond à la notion du déplacement plus ou moins rapide sur la trajectoire. Cette mesure de la vitesse va aussi permettre de définir une mesure de la longueur de la trajectoire entre deux points, que l'on définit comme la limite de la longueur d'un arc brisé entre ces deux points, quand tous les points de l'arc brisé sont infiniment près de la trajectoire. De façon infinitésimale, avec un intervalle de temps infinitésimal dt on a un élément infinitésimal de longueur ds, et la relation entre la longueur de l'arc et le temps mis à le parcourir: $ds=vdt$ où v est la mesure du module de la vitesse. Cette relation infinitésimale définit l' « **abscisse curviligne** s de la trajectoire » et généralise bien le fait que la distance parcourue est proportionnelle à la vitesse moyenne, ici la vitesse instantanée, et au temps mis à la parcourir. Au passage, on a appris à mesurer la longueur des arcs de courbe quelle que soit la forme de cette courbe, paramétrée ici par le temps.
D'où une géométrie infinitésimale riche en calculs et en applications.
D'autre part la définition de la trajectoire et des équations horaires par l'expression des coordonnées variables de $\overrightarrow{OM(t)}$ vient de nous fournir l'expression du vecteur vitesse $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{t})$, un vecteur variable en fonction du temps. Cela nous définit à son tour une nouvelle courbe, appelée l'**hodographe,** lieu des vecteurs vitesses. Maintenant la définition du vecteur vitesse sur l'hodographe nous donne la dérivée seconde de la position par rapport au temps,
c'est l'**accélération** $\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ du mobile**.**

Donc l'accélération mesure la variation de la vitesse du mobile au cours du temps. Il se trouve que l'observation montre que l'accélération est sensible à l'action des différentes parties, causes, qui déterminent le mouvement. Aussi on se limite pratiquement à l'étude des deux premières dérivées de la position, la vitesse et l'accélération, parce que ces propriétés donnent l'essentiel du mouvement.
Bien sûr le raisonnement précédent qui permet de passer de la trajectoire à l'hodographe s'étend à tous les niveaux de dérivation et permet de définir ainsi les dérivées troisièmes, quatrièmes, énièmes de la position par rapport au temps, avec une propriété géométrique simple. Une application potentielle de ces dérivées est la formule de Taylor qui permet à partir des données locales, position, vitesse, dérivée énième de déduire la donnée globale des positions à tout moment. C'est la notion de **développement limité**.
Le mouvement est perçu comme une **différence** entre le mobile et l'observateur. Or l'observateur de référence peut lui-même se déplacer par rapport à un autre

observateur qu'on peut estimer moins mobile. Par exemple, on peut observer un mobile dans son déplacement par rapport à la terre ou par rapport au soleil. Comme le soleil est considérablement plus lourd, plus massif que la terre, le repère lié au soleil est sûrement plus fixe que celui lié à la terre. C'est un vieux problème. On peut aussi trouver des changements de repère plus prosaïques. Ainsi un observateur situé sur un bateau, c'est le cas historique, n'a pas la même perception qu'un observateur à terre ou sur un autre bateau. C'est aussi vrai d'un observateur dans un train, un avion ou une fusée, voire d'un observateur fixé sur un rayon d'une roue de vélo et observant l'extérieur ! Ces changements de repère peuvent correspondre à de simples translations quand on garde des orientations fixes, par exemple par rapport aux étoiles, mais ils correspondent souvent à des produits de translations et rotations. Ainsi la terre a un mouvement de rotation diurne sur elle-même autour de l'axe des pôles et un mouvement de révolution annuel qui correspond à son déplacement sur son orbite autour du soleil. Ainsi un repère lié à la terre aura pour axe z un axe vertical, c'est-à-dire passant par le centre de la terre et donc en rotation par rapport à un axe dirigé vers l'étoile polaire. D'où la nécessité d'étudier ces changements de repère pour une étude générale, à l'échelle céleste. Nous traitons ici seulement du problème des coordonnées polaires qui nous permet aussi de donner des exercices tests pour le lecteur où les notions pratiques de résolution d'équation différentielle sont abordées à un niveau proche de celui du concours.

Coordonnées polaires, Vitesse

La représentation du plan en coordonnées polaires est caractérisée par un centre O, et une direction, celle du demi axe $\overrightarrow{Ox}$ orienté vers les x croissants. Le point courant M est caractérisé par la distance positive $OM = r$ et l'orientation du demi-axe $\overrightarrow{OM}$ qui fait l'angle θ avec le demi-axe $\overrightarrow{Ox}$: $\theta = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$. Ces coordonnées sont bien adaptées à la description d'un mouvement de rotation autour de l'origine O puisque dans ce cas le rayon r reste constant et seul l'angle θ varie.
Des coordonnées polaires on passe aisément aux coordonnées cartésiennes du repère $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}$ où le demi-axe $\overrightarrow{Oy}$ est directement perpendiculaire au demi-axe $\overrightarrow{Ox}$. On en déduit aisément les coordonnées du mobile M dans ce repère : $x = r\cos\theta$ et $x = r\sin\theta$. Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires est légèrement plus compliqué puisque cette fois l'angle θ n'est défini qu'à 2π près, en radians : $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = Arc\cos(x/r)$.



Sur cette figure, on a indiqué le repère local des coordonnées polaires au point *M* avec les vecteurs unitaires et orthogonaux $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$. Ce repère local est naturel car si la distance *r* au centre augmente sans que l'angle θ ne varie, le mobile se déplace selon l'axe radial défini par le vecteur unitaire $\vec{e_r}$, et de même si l'angle θ varie sans que la distance *r* au centre ne varie, le mobile se déplace de façon infinitésimale selon l'axe ortho-radial défini par le vecteur unitaire $\vec{e_\theta}$ que nous venons de définir.

Bien entendu ce repère local tourne quand le point M se déplace, c'est pourquoi nous avons là l'exemple type d'un problème de changement de repère en rotation.

En utilisant les propriétés élémentaires de la dérivation d'un produit de fonctions, on en déduit aisément l'expression de la vitesse dans le repère local.

En effet le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM}=r\vec{e_r}$.

Le calcul des vecteurs unitaires et orthogonaux $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ ainsi que de leurs dérivées par rapport au temps peut s'effectuer en coordonnées cartésiennes, avant de revenir à leur expression géométrique plus générale :

$\vec{e_r}=(\cos\theta, \sin\theta)$,

D'où la dérivée :

$\frac{d\vec{e_r}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta, \cos\theta)=\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$, soit en utilisant un point au dessus d'une fonction pour indiquer sa dérivée par rapport au temps, une notation usuelle en cinématique, où le temps a un rôle particulier, l'expression géométrique :

$\dot{\vec{e_r}}=\dot{\theta}\vec{e_\theta}$.

De même pour le vecteur unitaire ortho-radial,

$\vec{e_\theta}=(-\sin\theta, \cos\theta)$, d'où $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}(-\cos\theta, -\sin\theta)=-\frac{d\theta}{dt}\vec{e_r}$ soit en utilisant encore un point au dessus d'une fonction pour indiquer sa dérivée par rapport au temps, l'expression géométrique :

$\dot{\vec{e_\theta}}=-\dot{\theta}\vec{e_r}$.

On remarque que la dérivée par rapport au temps d'un vecteur unitaire est directement orthogonale à ce vecteur dans le sens direct et que sa mesure est la vitesse angulaire de son orientation.

D'où le calcul du vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{V}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

Bien entendu, le calcul de l'accélération en coordonnées polaires s'en déduit aisément par une deuxième dérivation. Ici nous nous contentons de cette formule de la vitesse en coordonnées polaires. Elle met en évidence l'existence d'une composante radiale de la vitesse : $\dot{r}$ et aussi l'existence d'une composante orthoradiale de la vitesse : $r\dot{\theta}$. Cette dernière est proportionnelle à la fois au rayon *r* et à la vitesse angulaire instantanée $\dot{\theta}$.

Dans le cas d'une rotation autour de l'origine, la distance *r* au centre ne varie pas et la vitesse de rotation s'écrit :

$\vec{V}_r = \dot{\theta} r \vec{e_\theta} = \dot{\theta} \vec{k} \wedge \overrightarrow{OM}$ où l'on a introduit l'axe $\overrightarrow{Ok}$ de rotation, perpendiculaire au plan considéré et le produit vectoriel de deux vecteurs qui est un vecteur perpendiculaire à ces deux vecteurs et dans le sens direct selon l'ordre des vecteurs dont on prend le produit, et dont la mesure est égale à l'aire du parallélogramme défini par ces deux vecteurs. L'avantage de cette formule géométrique est sa concision.
Ce détour par les coordonnées polaires nous a permis de calculer la vitesse imposée à un système par sa rotation d'ensemble. Cette vitesse est perpendiculaire à l'axe de rotation et au rayon vecteur qui donne la position instantanée. Bien entendu ce calcul permet de calculer la différence entre les vitesses d'un même mobile quand elles sont notées par deux observateurs en rotation l'un par rapport à l'autre. Il permet donc d'aborder les problèmes de changement de repère.

Très généralement, ces études de trajectoire permettent de définir des courbes comme des trajectoires et aussi le mouvement sur ces trajectoires. Elles donnent donc lieu à des intégrations typiques d'équation différentielle pour passer du caractère local, de proche en proche de la définition pratique au caractère global de la courbe ou du mouvement dans son ensemble. C'est ce que montrent les exercices suivants que l'on se propose de donner comme tests d'autoévaluation de niveau de calcul.

■ Exercice 1. ** **Une spirale logarithmique**
On désire réaliser une courbe C dont le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ fasse un angle constant α avec la tangente en ce point M, et donc avec la vitesse $\vec{V}$ en ce point M quand il se déplace. La courbe est parcourue avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ constante.
1). Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}$ en coordonnées polaires de centre O ($OM = r, (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$) en fonction de r et des dérivées $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$ de r et θ par rapport au temps.
2). En utilisant l'expression de l'angle : $\theta = \omega t$, écrire l'expression de la vitesse $\vec{V}$ en fonction de r, $\dot{r}$ et ω. Quel temps sépare deux intersections successives du demi axe $\overrightarrow{Ox}$ par la courbe, qu'en déduire pour le temps mis à faire un tour autour de l'origine?
3). Calculer la tangente de l'angle que fait la vitesse $\vec{V}$ avec le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de r, $\dot{r}$ et ω.
4). En déduire pour la courbe C une équation différentielle linéaire en r et $\dot{r}$ que l'on résoudra en appelant $a = \exp[1/\tan\alpha]$ et r_0 la distance initiale à l'origine.
5). Calculer le rapport entre les rayons vecteurs correspondants au même angle géométrique θ. Qu'en déduire pour la courbe C ?

■ Exercice 2. ** **Une spirale d'Archimède**
Un mobile M décrit la trajectoire C'. La composante de sa vitesse selon l'axe orthoradial (perpendiculaire au rayon) $\vec{e_\theta}$ est constante et égale à v.
1). Donner les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ du mobile M sur les axes radial $\vec{e_r}$ et orthoradial $\vec{e_\theta}$ en coordonnées polaires de centre O ($OM = r, (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$) en fonction du rayon r et des dérivées $\dot{r}, \dot{\theta}$ par rapport au temps.
2). On impose la relation entre l'accroissement du rayon et l'accroissement de l'angle: $dr/d\theta = a/2\pi$, quelle est la dimension de la constante a ? Déduire de cette

relation l'expression du rayon vecteur r en fonction de l'angle θ quand le rayon vecteur vaut r_0 pour $\theta=0$. Quelle distance sépare deux intersections successives d'un demi axe radial par C'?
3). Ecrire que la composante de la vitesse selon l'axe orthoradial $\vec{e_\theta}$ est égale à v et en déduire une équation différentielle en θ et $\dot{\theta}$. La résoudre par intégration en séparant les variables θ et t. L'angle θ est une fonction croissante du temps. Au temps t=0, le mobile se trouve en A de coordonnées polaires $(r_0, 0)$.
4). Donner l'allure de la fonction $\theta(t)$. 5). En déduire l'allure de $r(t)$.

■ Exercice 3. * **Une spirale**
Un mobile M décrit la trajectoire C''. La composante de sa vitesse selon l'axe orthoradial (perpendiculaire au rayon) $\vec{e_\theta}$ est constante et égale à v.
1). Donner les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ du mobile M sur les axes radial $\vec{e_r}$ et orthoradial $\vec{e_\theta}$ en coordonnées polaires de centre O ($OM=r$, $(\vec{Ox},\vec{OM})=\theta$) en fonction du rayon r et des dérivées $\dot{r}, \dot{\theta}$ par rapport au temps.
2). On impose l'équation de la trajectoire : $r = b\theta^2$, quelle est la dimension de la constante b ?
3). Ecrire que la composante de la vitesse selon l'axe orthoradial $\vec{e_\theta}$ est égale à v et en déduire une équation différentielle en θ et $\dot{\theta}$. La résoudre par intégration en séparant les variables θ et t. On suppose qu'à l'instant initial $\theta = 0$.
4) En déduire les fonctions $\theta(t)$ et $r(t)$.

Les trois courbes en question sont des spirales. En effet une spirale est donnée par une équation : $r=f(\theta)$, et donc il existe une infinité de spirales, comme de sortes de coquilles d'escargot. Le premier exercice donne une **construction géométrique** de cette spirale, de proche en proche, comme un escargot pourrait le faire en construisant sa coque au fur et à mesure de sa croissance. Le second exercice se rapporte au **mouvement** sur une spirale dont on donne le principe de la progression. Comment faut-il faire tourner un disque sur lequel une spirale serrée est gravée pour que les conditions de lecture du signal gravé soient optimales, c'est à dire que la vitesse de défilement de la piste gravée soit constante pour le lecteur orienté perpendiculairement à la rotation ? C'est un problème de lecture de disque compact par exemple : comment faire tourner ce disque pour avoir une lecture optimale. Le troisième exercice reprend ce problème du mouvement pour une autre spirale.

Exercices corrigés

Exercice 1. Une spirale logarithmique.

1) C'est la formule du cours, à savoir : $\vec{V} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}'\vec{e_\theta}$
2). Le déplacement sur la courbe est régi par une vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \omega$ d'où $\theta=\omega t$ donc : $\vec{V} = \dot{r}\vec{e_r} + r\omega\vec{e_\theta}$.
Les intersections successives du demi-axe $\vec{Ox}$ par la courbe correspondent aux valeurs successives de l'angle : $\theta=2n\pi$ et $\theta=2(n+1)\pi$. Elles sont séparées par l'intervalle de temps constant $T=2\pi/\omega$ qui est la période de rotation du demi-axe $\vec{Ox}$ autour de l'origine.

3). Dans le repère local on en déduit le rapport trigonométrique de l'angle $\alpha : \tan\alpha = (\omega r)/\dot{r}$

4). Pratiquement, il est plus simple de considérer le rapport trigonométrique inverse :

$\dot{r}/(\omega r) = 1/\tan\alpha$ où les variables r et t sont séparées, ce qui permet d'écrire l'équation différentielle linéaire $\dot{r}\tan\alpha - \omega r = 0$

donc par intégration de l'expression $dr/r = (\omega/\tan\alpha)dt$, on obtient pour l'intégrale définie entre l'instant 0 et l'instant t : $\ln(r/r_0) = (\omega t)/\tan\alpha$ soit encore $r = r_0 \exp(\omega t/\tan\alpha) = r_0\, a^{\omega t} = r_0\, a^{\theta}$

On reconnaît ici la solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre citée plus haut qu'on aurait pu intégrer directement. Cette exponentielle est responsable du nom historique donné à cette spirale : « spirale logarithmique ». En effet si le rayon est une fonction exponentielle de l'angle au centre, l'angle est une fonction logarithmique du rayon.

5) Quand le temps a augmenté de la période T, on a fait un tour autour de l'origine, on retrouve le même angle géométrique entre le rayon vecteur et le demi-axe $\overrightarrow{Ox}$, le nouveau rayon r a été multiplié par $a^{2\pi}$ par rapport au rayon noté au tour précédent. Après n tours, on retrouve un rayon multiplié par $a^{2n\pi}$. La courbe est donc globalement invariante par rapport à une homothétie de centre O et de rapport de dilatation : $a^{2\pi}$. Cette invariance à toute échelle relierait les formes de coquilles d'escargots à celles des galaxies spirales dans un même mouvement de rotation autour de l'origine. Evidemment on peut tourner soit dans le sens trigonométrique direct, soit dans le sens des aiguilles d'une montre et donc enrouler ou débobiner la spirale. Cette spirale logarithmique est souvent représentée graphiquement.

Exercice 2. Une spirale d'Archimède

1). C'est encore la même formule du cours : $\vec{V} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$.

2) a est une longueur puisque a et r sont de même dimension, les angles sont sans dimension et r et a sont tous deux divisés par des angles. On reconnaît que les variables sont séparées, ce qu'on écrit sous forme différentielle $dr = (a/2\pi)d\theta$ et on intègre, ou par intégration directe, on obtient : $r = (a/2\pi)\theta + r_0$ où on a tenu compte des constantes d'intégration.

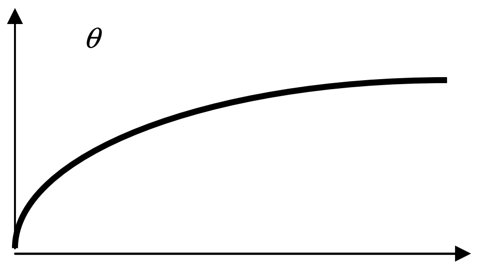
Donc quand l'angle θ augmente de 2π, après un tour du demi-axe, le rayon r augmente de la longueur a, a est donc la distance entre deux spires successives mesurée sur l'axe OM. Cette longueur a est aussi la période, c'est à dire la distance qui sépare les intersections successives de la courbe avec le rayon OM. Cette spirale qui correspond à un bobinage simple, à une distance régulière entre les sillons successifs de la gravure du disque, est appelée « spirale d'Archimède ». En revenant à la version « escargot » de la spirale, cela signifierait que l'escargot n'augmente pas de taille latérale lors de sa croissance. On en conclut que la spirale logarithmique est mieux adaptée à décrire une forme d'escargot.

3) On a donc en exprimant le rayon r en fonction de l'angle l'expression différentielle :

$(a/2\pi)\theta\dot{\theta} + r_0\dot{\theta} = v$. La variable temps se sépare facilement de la variable angulaire dans cette équation différentielle, d'où l'intégration à la fois par rapport à l'angle et par rapport au temps, soit en tenant compte des constantes d'intégration :

$(a/4\pi)\theta^2 + r_0\vartheta = vt + C$.

Avec les conditions initiales, on en déduit C=0.
On remarque bien que la vitesse angulaire ne doit pas être constante comme elle l'était pour les disques, les 33 tours (trente trois tours par minute) et autres formats.
4) En conséquence le temps t est une fonction parabolique de l'angle thêta et cette fonction passe par l'origine. C'est le point important du problème, la vitesse angulaire n'est pas constante au cours du temps. Pour avoir un bon défilement de la piste du disque compact, il ne peut pas tourner à vitesse angulaire constante, il faut donc « réguler » la vitesse de défilement et non la vitesse de rotation comme on le faisait pour les tourne-disques.
D'où l'allure de la fonction thêta de t :
Elle passe par l'origine avec une pente finie. Cette pente, qui est la vitesse angulaire instantanée, décroît au cours du temps. Cela correspond au fait que lorsque le rayon est grand, la vitesse angulaire requise pour obtenir une certaine vitesse de défilement est moins grande que lorsque le rayon est petit.



5) Comme la relation entre le rayon vecteur et l'angle est linéaire, le temps t est aussi une fonction parabolique du rayon vecteur. Cette fois le rayon vaut initialement r_0 et n'est donc pas nul. D'où l'allure parabolique de la fonction $r(t)$.