CHAPITRE 1

COMMENT SE PRÉPARER À L'ORAL DU CAPES ?

Apparent rari nantes in gurgite vasto.
Virgile, *Énéide*, Livre I, vers 118.

1.1. Les ingrédients

Avant toute chose : si vous n'en possédez pas déjà une, allez donc acheter une collection complète de livres de mathématiques pour les deux premières années universitaires. Il s'agit en général de deux ou quatre volumes, selon les éditeurs et les auteurs, contenant la totalité des programmes d'analyse et d'algèbre de ces deux années. Trop cher ? Non, pas du tout. Si vous entamez une préparation au CAPES, vous étudiez déjà depuis trois ans au moins les mathématiques et vous exprimez le désir de les enseigner encore quarante ans. Dans ce contexte, un investissement de deux ou trois cents euros n'a rien d'exceptionnel. Supposons en effet un moment que, en vous privant de cet outil de travail, vous ratiez le CAPES et que vous refassiez une année de préparation : quel serait le coût d'une telle opération ?

Exercice 1.1.1. — *Faire ce calcul. Ne pas oublier de compter le manque à gagner, ainsi que l'année perdue en cotisations au régime des retraites. Se rappeler qu'il faudra quarante-deux ans pour avoir le droit à une retraite complète et qu'on est obligé de prendre sa retraite à soixante-cinq ans au plus tard.*

Bref, je considère que, si on envisage de devenir professeur de mathématiques, il est normal qu'on se construise une petite bibliothèque personnelle de livres consacrés aux mathématiques. Bibliothèque qu'on élargira d'ailleurs au fil des ans, si on ne veut pas perdre le contact avec la discipline que l'on enseigne.

Certains diront qu'on peut très bien utiliser les livres de la bibliothèque. Vrai, mais il est à mon avis indispensable de disposer d'un certain nombre de livres de référence, avec lesquels on est intimement familier et que l'on a sept jours sur sept et 24 heures sur 24 heures à sa disposition. On pourra consulter en plus d'autres livres à la bibliothèque dans le but de comparer les différentes approches d'un même sujet ou pour trouver des exemples supplémentaires.

Un conseil : les livres trop récents sont souvent trop élémentaires pour vos besoins. Tournez-vous plutôt vers des ouvrages un peu plus anciens, qui sont plus complets et qui explorent plus le fond des choses. Deux classiques sont le Dixmier [**Di**] et le Lelong-Ferrand-Arnaudiès [**LeFeAr**].

Par ailleurs, procurez-vous (c'est gratuit !) le dernier rapport du président du jury. Vous l'obtiendrez dans les services compétents de votre université ou simplement sur le site web `http://www.capes.math.jussieu.fr`. Ce rapport est une mine d'or d'informations utiles : conseils pratiques, description et modalités des épreuves, énoncés et corrigés des épreuves écrites accompagnés de commentaires détaillés sur les erreurs et pièges à éviter, la liste des exposés de la première épreuve orale, ainsi que les sujets de l'épreuve sur dossier des années précédentes. Mais surtout, en ce qui concerne les épreuves orales, on y trouve des indications précieuses sur les attentes du jury, ce qui le rebute ou l'exaspère comme ce qui lui plaît et le réjouit. C'est le seul document disponible qui jette un peu de lumière sur la psychologie du jury et il convient donc de l'étudier attentivement. Mettez-en une copie dans votre voiture, vous en lirez des passages pendant les embouteillages, une autre sur votre table de chevet et une troisième dans votre cartable. N'oubliez pas : vous vous présentez à un entretien d'embauche devant trois ou quatre inconnus. Ils ne savent rien sur vous et vous ne savez rien sur eux. Ils ont la tâche difficile de vous juger en peu de temps. Le rapport explique clairement ce qu'ils attendent de vous. Vous leur rendrez la tâche plus facile et vous mettrez toutes les chances de votre côté si vous anticipez leurs désirs et si vous évitez les erreurs évidentes qu'ils soulignent année après année dans le rapport. Rappelons encore qu'il est possible d'assister aux épreuves orales : elles sont publiques. C'est une excellente idée d'y consacrer une journée avant de passer l'épreuve vous-même : cela vous permettra de vous familiariser avec les lieux et avec la procédure et d'observer quelques jurys et candidats dans le feu de l'action.

Finalement, procurez-vous les programmes de mathématiques du collège et du lycée (`http://www.eduscol.education.fr`), ainsi que les commentaires sur ces programmes, publiés par le Centre national de documentation pédagogique (`http://www.cndp.fr`).

1.2. Comment préparer un exposé ?

Rappelons que le jour où vous passerez l'épreuve, vous aurez à choisir une leçon parmi deux tirées au hasard, puis deux heures pour préparer votre exposé de vingt-cinq minutes devant le jury. Vous n'aurez accès à aucune documentation pendant cette période. C'est un exercice un peu particulier, pour lequel il convient de s'entraîner. Pour cela, je vous propose la stratégie suivante, en six étapes. Au début, vous y mettrez bien plus de deux heures pour concevoir la moindre leçon, mais la vitesse viendra avec l'expérience.

1. Lire attentivement l'énoncé de la leçon.
2. Consulter les programmes de collège et de lycée et analyser soigneusement à quel(s) niveau(x) la matière est enseignée. Quels sont les prérequis de la leçon ?
3. S'assurer que l'on maîtrise bien le sujet et tout ce qui le concerne du niveau de la sixième jusqu'au niveau Bac+3. Étudier en particulier les liens avec les sujets et thématiques voisins.
4. Décider à quel niveau placer la leçon.
5. Rédiger un plan.
6. S'entraîner à donner la leçon dans une salle vide ou dans votre garage, pour s'assurer qu'elle n'est ni trop longue ni trop courte.

Commentons les points ci-dessus.

Étape 1 : Lire le sujet

Vous aurez compris, il faut s'assurer d'avoir bien compris de quoi parle la leçon avant de se lancer. Ce n'est pas forcément facile et directement lié au point 2 et donc à la question des prérequis.

Étape 2 : Définir les prérequis

Il faut en particulier se demander comment se fait l'articulation avec le reste du programme. Sachez qu'en général il n'y a pas de réponse unique.

Considérons un exemple. Supposons que vous vous apprêtiez à préparer la leçon I.53 sur les suites convergentes, dont l'intitulé est : « Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Limites et relation d'ordre. » Dans cette leçon la notion de limite d'une fonction en un point est donc un prérequis, ainsi que la notion de continuité. Mais, est-ce bien un prérequis pour toute la leçon ? Voici deux façons différentes de concevoir les choses.

D'abord vous pouvez très bien organiser votre leçon de la façon suivante. Vous dites au jury : « Bien évidemment, afin de parler de la composition avec une fonction continue, je vais supposer que la notion de limite d'une fonction soit déjà connue des élèves ; mais en ce qui concerne la partie sur les suites convergentes, j'ai construit ma leçon comme si cette notion leur était encore inconnue. »

Et puis vous démarrez. Vous introduisez la notion de limite d'une suite, puis les théorèmes sur son unicité, les opérations algébriques, puis le passage à la limite dans les inégalités (et les fameux gendarmes), tout en donnant des exemples de quelques suites de référence et au moins une démonstration. Tout cela peut se faire sans la notion de limite d'une fonction en un point de son domaine. Comme c'est le premier contact avec la notion de limite pour les élèves, il convient de prendre son temps et de donner des exemples simples. Puis vous rappellerez au jury que pour la partie finale de la leçon la notion de continuité est un prérequis et vous terminez avec l'énoncé et éventuellement la démonstration du théorème :

Théorème 1.2.1. — *Soit* $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue en un point* $a \in \mathrm{D}$. *Soit* (x_n) *une suite d'éléments de* D *qui converge vers* a. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Mais voici une autre approche possible. Vous supposez que les élèves aient déjà étudié la notion de limite d'une fonction en un point. Dans ce cas, la première partie de la leçon et surtout les résultats sur les opérations algébriques leur sont déjà familiers dans cet autre contexte et on peut/doit s'appuyer sur cette connaissance antérieure lorsqu'on enseigne. On pourrait alors étoffer la deuxième partie de la leçon, en énonçant le théorème plus fort, plus utile et plus dur à démontrer que voici :

Théorème 1.2.2. — *Soit* $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* a *un point de son domaine. Alors* f *est continue en* a *si et seulement si toute suite* (x_n) *dont les termes appartiennent à* D *et qui converge vers* a *a la propriété :*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Remarquez que les plans de ces deux leçons ne diffèrent que très légèrement l'un de l'autre. Mais à l'oral quelques phrases d'explication suffiront pour faire ressortir les différences qui sont d'ordre pédagogique et non mathématique.

Continuons un peu sur le même thème. Supposons maintenant que vous prépariez la leçon I.58 sur la limite d'une fonction en un point dans (l'adhérence de) son domaine : « Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fonction en un point. Exemples. » Avez-vous besoin de supposer en prérequis la notion de limite d'une suite ? Absolument pas. Vous pouvez faire toute cette leçon sans jamais sortir la moindre suite de votre poche. Vous supposerez donc que ce soit dans ce cours que les élèves sont confrontés la première fois à la notion de limite et vous prendrez les précautions nécessaires, exemples et dessins à l'appui. Vous étofferez peut-être la leçon en parlant de limite à gauche et à droite. Alternativement, vous pouvez supposer que la notion de limite de suite ait déjà été enseignée auparavant. Dans ce cas vous pouvez aller plus loin, en passant moins de temps sur la première partie et vous présenterez en particulier le deuxième théorème ci-dessus, qui est très utile lorsqu'on souhaite montrer qu'une fonction n'est pas continue.

Exercice 1.2.3. — *Montrer que la fonction* $f(x) = \sin(1/x), x \in \mathbb{R}^*$ *n'admet pas de limite en* $0 \in \mathbb{R}$*, en n'utilisant que la (négation de la) définition de limite. Faire la même démonstration en s'appuyant sur le théorème ci-dessus.*

Comme avec la leçon précédente, les différences sont d'ordre pédagogique. Devant une classe de lycée, vous finirez par parler de limites de fonctions et de suites, l'ordre étant à votre discrétion. Du point de vue pédagogique, il y a des mathématiciens qui considèrent qu'il est préférable d'enseigner d'abord la limite d'une fonction, puis la limite d'une suite. D'autres pensent le contraire. Ça se discute, c'est largement une question de goût, cela peut aussi dépendre de votre public. Il ne faut pas s'en étonner. La pédagogie et les mathématiques sont des disciplines très différentes. Tandis qu'en mathématiques la négation d'une affirmation correcte est fausse, en pédagogie elle est le plus souvent également correcte.

Les membres du jury en sont conscients. Si vous avez un discours pédagogique cohérent et si vous maîtrisez le sujet, ils seront ravis, même s'ils ne sont pas forcément d'accord avec votre point de vue sur la pédagogie. L'important, c'est d'en avoir un qui tienne la route.

Ce que vous devriez retenir de toute cette discussion est que, en fin de compte, les leçons I.53 et I.58 ci-dessus sont essentiellement identiques du point de vue mathématique. Elles introduisent la notion de limite dans deux contextes légèrement différents et en présentent quelques propriétés très élémentaires. Puis, pour étoffer la leçon, il y est un peu question de continuité.

La discussion précédente nous amène directement au point 3, qui est absolument primordial.

Étape 3 : Maîtriser le sujet, solidifier les bases

C'est ici que les livres de mathématiques que vous vous êtes achetés sont indispensables. Le découpage de la matière en plus de quatre-vingts leçons pour les besoins du concours ne doit pas obscurcir sa grande unité. Préparer les épreuves (écrites comme orales) du CAPES avec comme seul support des livres de mathématiques du collège et du lycée, ainsi que des livres de préparation au CAPES avec des leçons toutes faites et des ressources internet, est une erreur capitale. Il est très important de savoir placer le sujet dans son contexte et de le maîtriser bien au-delà du niveau où vous le traitez : sans documentation sérieuse, c'est impossible. Par exemple, la préparation de la leçon I.53 ci-dessus doit être l'occasion de réviser la théorie des suites dans sa totalité, y compris les propriétés topologiques de $\mathbb{R}$, les théorèmes principaux sur la convergence (suites croissantes majorées, adjacentes, Bolzano-Weierstrass, etc.), telle qu'on la trouve dans tout bon livre d'analyse de niveau universitaire. D'ailleurs, vous serez alors prêt pour aborder n'importe quel autre de la demi-douzaine d'exposés consacrés aux suites. N'oubliez finalement pas que ces connaissances sont également indispensables pour l'épreuve écrite : c'est donc tout bénef. Les étudiants font trop souvent l'erreur de considérer la préparation à l'épreuve orale comme disjointe de la préparation à l'écrit. Ils se trompent : dans les deux cas il s'agit en premier lieu d'apprendre et de réviser les mathématiques. Je reviendrai longuement sur ce point, en développant d'autres exemples concrets parce que je sais par expérience que les étudiants ne sont pas enclins à croire ce discours...

Il faut par ailleurs se poser en permanence les questions suivantes :

> Quel est l'intérêt et/ou l'importance des nouvelles notions introduites dans la leçon ?
> Quel est l'intérêt et/ou l'importance des théorèmes introduits dans la leçon ?
> Quel est l'intérêt et/ou l'utilité des outils introduits dans la leçon ?

Il me semble en effet évident que vous ne serez jamais en mesure d'attirer, puis de garder l'attention de vos élèves si vous n'avez pas de réponse à ces questions. Remarquez que les réponses sont forcément subjectives. En effet, l'intérêt et l'importance dont il est question peuvent faire référence – selon vos goûts – à des développements ultérieurs en mathématiques, mais aussi à ses applications dans les sciences physiques, les sciences de la vie, les sciences économiques ou sociales. Pour répondre à ces questions, il ne faut donc pas seulement être capable de placer la leçon dans l'ensemble du corpus mathématique mais aussi de la rapporter à ses applications. Bien évidemment, ceci nécessite une certaine curiosité intellectuelle et une ouverture d'esprit : c'est le travail de toute une vie. Vous lisez parfois des livres de vulgarisation scientifique ?

Exercice 1.2.4. — *Écrire un essai d'une page sur l'importance de la notion de « fonction » dans les mathématiques et ses applications. Même chose pour celle de limite.*

Maintenant que vous maîtrisez la matière (Étape 3) et que vous savez où la leçon se situe par rapport aux programmes (Étape 2), vous pouvez décider à quel niveau vous placerez votre leçon (Étape 4) et finalement construire un plan. Commentons ce dernier point.

Étape 5 : Construire le plan

Voici une stratégie possible, en quatre étapes :

1. Décider d'abord des grandes lignes : chapitres, sections, sous-sections ;
2. Rédiger soigneusement les définitions et théorèmes, en faisant particulièrement attention à la cohérence des notations ;
3. Étoffer l'exposé avec les exemples, dessins et applications indispensables ;
4. Décider quelle(s) démonstration(s) présenter et la (les) rédiger.

L'idée de cette démarche est de définir d'abord les grandes lignes, puis de remplir progressivement les cases. J'ai mis le choix et la rédaction de la démonstration (indispensables pourtant !) en dernier parce que cela peut s'avérer la tâche la plus délicate. En effet, si vous parcourez par exemple la trentaine de leçons d'analyse (dont vous trouverez la liste à la page 189), vous vous rendrez compte que vous devrez, le jour J, être capable de produire sur commande la démonstration de n'importe quel théorème d'analyse du programme de la première année universitaire. Quoi qu'on en dise, ce n'est pas chose facile, en particulier pour ce qui concerne les théorèmes sur les fonctions continues. Évitez donc de vous énerver ou même de paniquer parce que vous n'arrivez pas à retrouver tel ou tel argument un peu délicat : armez-vous d'abord d'un plan bien structuré, exemples et dessins à l'appui. Puis, choisissez une démonstration qui vous permette de montrer vos capacités, quitte à ne pas démontrer le résultat central de la leçon parce qu'un argument un peu délicat vous échappe.

Comment s'entraîner à cette tâche ? Rappelez-vous que pendant l'année de préparation, vous n'aurez l'occasion de présenter un exposé devant votre groupe d'oral qu'une demi-douzaine de fois tout au plus. Or, il y a plus de quatre-vingts leçons différentes et ce n'est donc pas assez. Qui plus est, ces exposés-là, vous les préparerez pendant une semaine au moins, en utilisant une multitude de documents. Vous présenterez aussi des exemples recherchés, dont vous ne vous souviendrez que difficilement le jour de l'épreuve. Photocopier, lire et classer les comptes rendus des exposés de vos condisciples dans un beau classeur à anneaux ne suffira pas. Voici donc une approche que je vous recommande pour vous entraîner à construire des plans dans un temps limité et de façon efficace.

Pendant les deux premiers mois de préparation avec votre groupe d'oral, vous aurez vu vos collègues exposer une vingtaine de leçons de type I. Pendant cette période, assurez-vous de réviser – à l'aide des livres que vous avez achetés – la matière correspondante. Puis, à partir de ce moment-là, mettez-vous deux ou trois fois par semaine à votre bureau armé d'un stylo et de papier, tirez au hasard une des leçons déjà traitées et rédigez, en quarante-cinq minutes, sans aide quelconque, les grandes lignes d'un plan selon l'algorithme ci-dessus. Le résultat devrait tenir sur trois pages tout au plus. Concentrez-vous d'abord sur les deux premiers points ci-dessus et s'il vous reste du temps, vous pouvez commencer à étoffer ce début de plan. De cette façon vous développerez un savoir-faire qui vous sera très utile. En effet, si vous êtes capable d'accoucher d'un plan crédible en trois quarts d'heure, il vous restera le jour J une heure et quart pour le compléter et vous serez prêt pour affronter le jury.

Quatre-vingt-une leçons en trente semaines de préparation, c'est presque trois par semaine : on ne peut pas rédiger et/ou apprendre par cœur autant de leçons et ce n'est d'ailleurs pas recommandé. (Lire le rapport du jury à ce propos !) Au contraire, *il faut développer une technique de rédaction qui puisse servir indépendamment du sujet traité*. D'ailleurs, on l'a vu avec l'exemple des leçons I.53 et I.58 ci-dessus, certaines leçons se ressemblent beaucoup et ce n'est pas la peine de les préparer séparément. Par ailleurs,