Chapitre 1

~ Analyse ~

Second degré

Exercice A-1

Résoudre les équations suivantes :

1) $x + \sqrt{x} = 6$
2) $x^4 + x^2 - 2 = 0$
3) $x^4 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 4 = 0$
4) $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} = 2x - 1$
5) $\sqrt{2x - 6} = x - 4$
6) $\dfrac{x^2+1}{x-4} + 2x - 5 = 4$

➢ Mots-clés : équation, *inconnue auxiliaire*

Exercice A-2

Soit l'équation $(1 + \sqrt{3})x^2 - \sqrt{3}\,x + 2 - \sqrt{3} = 0$

1) Prouver que $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ est une racine de cette équation.
2) Déterminer l'autre racine sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont deux entiers relatifs.

➢ Mots-clés : équation, somme et produit des racines d'un trinôme

Exercice A-3

Déterminer le signe de $m^2 - 1$ en fonction de m puis résoudre l'équation $x^2 + 2mx + 1 = 0$ où m est un paramètre réel (on distinguera trois cas).

➢ Mots-clés : équation, *paramètre*

Exercice A-4

On considère l'équation $3x^3 + 4x^2 - 19x + 10 = 0$ (E).

1) Montrer qu'il existe deux réels a et b, tels que $\forall\, x \in \mathbb{R}$:
$$3x^3 + 4x^2 - 19x + 10 = (3x - 2)(x^2 + ax + b).$$

2) Résoudre alors l'équation (E).

➢ Mots-clés : équation, factorisation, *identification*

Exercice A-5

Résoudre dans IR l'inéquation $\frac{x^2+2x-2}{x+2} \leq \frac{x^2-x-1}{x+1}$

➢ Mot-clé : inéquation

Exercice A-6

On pose $g(x) = 2x^2 + 9x + 9$ et $f(x) = \sqrt{g(x)}$.

1) Factoriser g(x).
2) Résoudre $g(x) < 0$.
3) En déduire l'ensemble de définition de f.

➢ Mots-clés : factorisation, inéquation

Exercice A-7

On pose $A(x) = -2x^3 + 11x^2 - 13x + 4$ et $B(x) = \sqrt{A(x)}$.

1) Prouver que pour tout x, $A(x) = (x-1)(-2x^2 + 9x - 4)$.
2) Factoriser A(x).
3) Résoudre $A(x) \geq 0$.
4) En déduire l'ensemble de définition de B(x).
5) Résoudre $B(x) = 2 - x$

➢ Mots-clés : équation, factorisation, inéquation

Exercice A-8

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

1) A quelle condition sur a, b, c cette équation a-t-elle deux racines x_1 et x_2 distinctes ou pas ?
2) A quelle condition (sur a, b, c) a-t-on $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$.
3) On suppose que ces deux conditions sont remplies. Déterminer alors en fonction de x_1 et x_2 les solutions de :
   a. $ax^2 - bx + c = 0$
   b. $cx^2 + bx + a = 0$ (avec $c \neq 0$).
   c. $a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$.

➢ Mots-clés : équation, racine, somme et produit des racines d'un trinôme

Exercice A-9

On pose $P(x) = 2x^2 - 18(x-3)^2$.

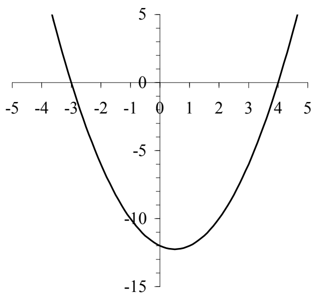
1) Développer et réduire P(x).
2) Factoriser P(x).
3) Parmi les trois formes de P(x) (celle de l'énoncé, la forme développée et la forme factorisée), indiquez dans chaque cas suivant laquelle est la plus adaptée, puis répondre à la question.
   a. Calculer P(0).
   b. Calculer P(3).
   c. Rechercher la racines de P(x).
   d. Calculer les antécédents de –162 par P.

➢ Mots-clés : factorisation, fonction polynôme, racine

Exercice A-10

Soit une fonction trinôme $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ où α et β sont deux nombres réels fixés. Déterminer en justifiant α et β dans chacun des cas suivants :

1) Les racines de f(x) sont $-1/3$ et 2.
2) La courbe représentative de f est celle de la figure ci-contre.
3) $f(x) > 0$ pour tout $x \neq -1$.
4) Le discriminant vaut 8 et la plus grande des racines est $3 + \sqrt{2}$.

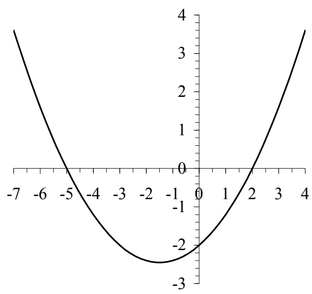


➢ Mots-clés : fonction polynôme, inéquation, racine

Exercice A-11

Soit f et g deux fonctions trinômes.
On donne :

- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 5$
- la courbe représentative de g est celle de la figure ci-contre.



1) Factoriser f(x).
2) A partir du graphique, déterminer les racines de g et g(0).
3) En déduire l'expression de g(x) en fonction de x.
4) Montrer que l'inéquation $g(x) \leq f(x)$ est équivalente à $x^2 + 3x - 10 \leq 0$ puis la résoudre.

5) Construire la courbe représentative de g.
6) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x solution de l'inéquation précédente, on a $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$. Montrer que 0 admet au moins deux antécédents par h que l'on précisera. 0 peut-il avoir d'autres antécédents par h ? Justifier.

➢ Mots-clés : factorisation, fonction polynôme, inéquation, racine

Exercice A-12

Dans un repère, *P* est la parabole d'équation $y = 5x^2 + 3x - 2$. A est le point de *P* d'abscisse 1. Parmi toutes les droites non parallèles à l'axe des ordonnées passant par A, en existe-t-il une qui coupe *P* en un seul point ? Si oui, donner son équation réduite.

➢ Mots-clés : équation, parabole, *mise en équation*, *paramètre*

Exercice A-13

Déterminer trois entiers pairs consécutifs dont la somme des carrés vaut 28820.

➢ Mot-clé : équation

Exercice A-14

Déterminer deux entiers naturels dont la somme des carrés vaut 818 et le produit vaut 391.

➢ Mots-clés : équation, somme et produit des racines d'un trinôme, *mise en équation*

Exercice A-15

On coupe un barreau en deux morceaux, de façon que le rapport du plus petit morceau au plus grand soit égal au rapport du plus grand morceau au barreau initial. Sachant que la longueur du petit morceau est 1, pouvez-vous calculer ℓ, la longueur du grand morceau ?

➢ Mots-clés : équation, somme et produit des racines d'un trinôme, *mise en équation*

Exercice A-16

Lorsqu'une fusée de masse M est située sur la droite Terre-Lune, à la distance x du centre de la Terre, elle subit une attraction d'intensité $gM\frac{M_T}{x^2}$ de la part de la Terre et une attraction d'intensité $gM\frac{M_L}{(D-x)^2}$ de la part de la Lune où g est la constante de gravitation universelle, M_T est la masse de la Terre, M_L celle de la Lune et D est la distance Terre-Lune (toutes les grandeurs en unités du système international). On prendra $M_T \approx 81{,}5\,M_L$.

1) Montrer qu'il existe sur la droite Terre-Lune deux points où les attractions de la Terre et de la Lune sont égales.
2) Dessiner à l'échelle ces deux points par rapport à la Terre et à la Lune. On prendra 10 cm pour la distance Terre-Lune.

Note : On démontre que tous les points de l'espace où les deux attractions sont égales sont situés sur une sphère dont le diamètre est le segment ayant pour extrémités les deux points précédents. L'intérieur de cette sphère est la « sphère d'attraction de la Lune ».

➢ Mots-clés : équation, *mise en équation*

Exercice A-17

On trouve dans l'ouvrage *Bijaganita* du mathématicien indien Bháskara (1114–1185) le problème suivant :

> *« La racine carrée de la moitié du nombre d'abeilles d'un essaim est partie butiner un jasmin ; et de même pour les huit neuvièmes de l'essaim ; la femelle restante bourdonne autour du seul mâle resté en arrière pour s'enivrer de la fragrance d'un lotus. Dis, Jolie Dame, le nombre d'abeilles de l'essaim. »*

Jolie Dame ou pas, trouver le nombre N d'abeilles de l'essaim.

☺ *On pourra prendre* $x = \sqrt{N}$ *comme inconnue auxiliaire*

➢ Mots-clés : équation, *inconnue auxiliaire*, *mise en équation*

Fonctions

Exercice A-18

Déterminer une fonction polynôme f de degré 5, impaire telle que f(2) = 6 et que 1 et $\sqrt{3}$ soient des solutions de f(x) = 0.

➢ Mots-clés : fonction polynôme, parité/imparité, racine

Exercice A-19

Soient les fonctions polynômes $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ et $Q(x) = 2 - 5x - 3x^2$.

1) Montrer que -1 est racine de P et déterminer deux réels a et b tels que $P(x) = (x + 1)(x^2 + ax + b)$.
2) Etudier le signe de Q(x) sur $\mathbb{R}$.

3) Résoudre $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$.

➢ Mots-clés : fonction polynôme, fonction trinôme, inéquation, racine, *identification*

Exercice A-20

Soit la fonction polynôme $f(x) = x^8 - 10x^4 + 9$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Quel est le degré de f ?
2) Prouver que f est paire. Qu'en déduire pour sa courbe représentative ?
3) Montrer que l'on peut écrire $f = g \circ h$, avec $h(x) = x^4 - 4$ et g une fonction trinôme de la forme $g(x) = x^2 + ax + b$ (on déterminera a et b).
4) Résoudre $f(x) = 0$.

➢ Mots-clés : composition, équation, fonction polynôme, fonction trinôme, parité/imparité, racine, *identification*, *inconnue auxiliaire*

Exercice A-21

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = 2x^2 - 8$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1) Déterminer les ensembles de définition de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.
2) Calculer $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.
3) Montrer que fog est une fonction monotone sur son ensemble de définition.
4) Etudier les variations de $g \circ f$ sur son ensemble de définition.

➢ Mots-clés : composition, fonction trinôme, variation

Exercice A-22

Soient f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g respectivement.
Soit $A = \{x \in D_f$ tels que $f(x) \notin D_g\}$ = ensemble des réels x de D_f tels que leur image par f n'appartient pas D_g.

1) Justifier que $D_{g \circ f} = D_f \backslash A = D_f$ privé des tous les éléments de A.
2) Montrer alors que si f et g sont impaires alors $g \circ f$ est impaire.

➢ Mots-clés : composition, parité/imparité

Exercice A-23

Donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation et calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^5 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12$
2) $f(x) = (2x + 3)^7$
3) $f(x) = \dfrac{3x-1}{5x+2}$
4) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{(x+1)^2}$

5) $f(x) = \cos(4 - 3x)$

6) $f(x) = \tan x$

7) $f(x) = \sqrt{4x+5}$

8) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

9) $f(x) = (x + \frac{1}{x})\sqrt{x}$

10) $f(x) = \frac{1}{(3x-5)^2}$

➢ Mots-clés : composition, dérivation, fonction polynôme, fonction rationnelle, fonction trigonométrique

Exercice A-24

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x - \frac{2}{x}$.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2) Etudier la parité-imparité de f. Qu'en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
3) Montrer sans dériver que f est croissante sur $]\, 0 \,; +\infty \,[$ puis dresser le tableau de variations de f sur D_f (sans les limites).
4) Construire $\mathcal{C}_f$.

➢ Mots-clés : fonction rationnelle, parité/imparité, variation

Exercice A-25

Soit la fonction polynôme f définie par $f(x) = x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$.

1) Quels sont l'ensemble de définition et le degré de f ?
2) Montrer que l'on peut réduire le domaine d'étude de la fonction f à $\mathbb{R}_+$ et dire comment obtenir la partie de la courbe représentative de f pour $x < 0$.
3) Prouver que f est le cube d'un trinôme du second degré.
4) On pose $g(x) = x^3$. Montrer sans dériver que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
   ☺ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
5) Déterminer une fonction h telle que $f = g \circ h$ et en déduire le sens de variation de f sur $[\, 0 \,; +\infty \,[$.
6) Dresser le tableau de variations de f.
7) Représenter graphiquement f.

➢ Mots-clés : composition, fonction polynôme, parité/imparité, variation, *identification*

Exercice A-26

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$ et $g(x) = \frac{1}{x + 1}$.

1) f est-elle paire ou impaire ? Justifier.
2) Trouver des réels a et b tels que $\forall\, x \in D_f$, $f(x) = x + a + bg(x)$.

3) Dresser sans justifier le tableau de variations de g sur son ensemble de définition.
4) En déduire (sans dériver mais en justifiant cette fois-ci à l'aide de la question précédente) le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

➢ Mots-clés : fonction rationnelle, parité/imparité, variation, *identification*

Exercice A-27

Dresser en justifiant le tableau de variations complet (limites incluses) des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 6x + 2$
   ☺ 3 *est racine de* f'(x).
2) $f(x) = \frac{x^2+3}{1-x}$. On montrera que la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à la courbe en $-\infty$ et $+\infty$.
3) $f(x) = \frac{x^2+3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

➢ Mots-clés : asymptote, dérivation, fonction polynôme, fonction rationnelle, limite, *étude de fonction*

Exercice A-28

On pose $g(x) = x^4 - 8x^2 + 1$ définie sur IR. Soit C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que g est paire. Que peut-on en déduire pour C_g ?
2) Calculer g'(x) et étudier son signe.
3) Construire le tableau de variations de g (justifier les limites).
4) Pour quelles valeurs de x, C_g admet-elle une tangente horizontale ?
5) Construire C_g avec minutie et placer les tangentes horizontales.

➢ Mots-clés : dérivation, fonction polynôme, limite, parité/imparité, tangente, *étude de fonction*

Exercice A-29

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$. A est le point de coordonnées (0 ; 1) et M un point de $\mathcal{P}$ d'abscisse x.

1) Montrer que $AM^2 = x^4 - x^2 + 1$.
2) On appelle f la fonction définie sur R par $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.
   a. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
   b. Dresser le tableau de variations de f sans les limites.