1
Arithmétique

1. RAPPELS

1.1. Vocabulaire

Soient a, b et c des nombres entiers.
– S'il existe un nombre c tel que $a \times b = c$ alors on dit que c est un multiple de a.
– Si a est un nombre entier non nul, on a : $\frac{c}{a} = b$ (la division de c par a donne un nombre entier). On dit que c est divisible par a ou que a est un diviseur de c.

Un entier est premier lorsqu'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque

0 n'est pas un entier premier car il admet une infinité de diviseurs.
1 n'est pas un nombre entier premier car il n'admet qu'un et un seul diviseur : lui-même.

✍ Exercice d'application 1

Compléter les affirmations suivantes :

1. $29 \times 11 = 319$, donc : 29 est un .... de 319
319 est un .... de 11.

2. $17 \times 36 = 612$, donc : 17 a pour 612
612 a pour .... 36.

3. $23 \times 18 = 414$, donc : 18 est un .... de 414
414 a pour .... 18.

Corrigé

1. Si $29 \times 11 = 319$ alors 29 est un diviseur de 319
319 est un multiple de 11.

2. Si $17 \times 36 = 612$ alors 17 a pour multiple 612
612 a pour diviseur 36.

3. Si $23 \times 18 = 414$ alors 18 est un diviseur de 414
414 a pour diviseur 18.

✍ Exercice d'application 2

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ?

	Vrai	Faux
1. 17 est un diviseur de 51, donc 17 a pour diviseur 51.		
2. 27 est un diviseur de 108, donc 108 a pour diviseur 27.		
3. 42 a pour diviseur 14, donc 14 est un diviseur de 42.		
4. 37 n'est pas divisible par 2, donc 37 n'est pas multiple de 2.		
5. 143 est un multiple de 11, donc 11 est un diviseur de 143.		
6. 28 est un multiple de 7, donc 7 a pour diviseur 28.		
7. 26 a pour diviseur 13, donc 26 est un diviseur de 13.		

Corrigé

1. Faux, 17 a pour multiple 51.

2. Vrai, car $27 \times 4 = 108$.

3. Vrai, car $42 = 14 \times 3$.

4. Vrai, il n'existe pas d'entier n tel que $2 \times n = 37$, 37 étant un nombre impair.

5. Vrai, car $143 = 13 \times 11$.

6. Faux, 28 est un multiple de 7, donc 28 a pour diviseur 7.

7. Faux, $26 = 13 \times 2$ donc 26 est un multiple de 13.

1.2. Critères de divisibilité

Un entier est divisible par :
- 2 si son chiffre des unités est pair.
- 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- 10 si son dernier chiffre est un 0.

✍ Exercice d'application 3

Trouver toutes les valeurs possibles des chiffres manquants a et b pour que le nombre $2a\,4b$ soit :

1. Divisible par 5.
2. Divisible par 9.
3. Divisible à la fois par 5 et par 9.

Corrigé

1. $2\,a\,4\,b$ est divisible par 5 si b prend les valeurs 0 ou 5 et quelque soit les valeurs de a.
On a donc les nombres solutions :
2 040 - 2 045 - 2 140 - 2 145 - 2 240 - 2 245 - 2 340 - 2 345 - 2 440 - 2 445 - 2 540 - 2 545 - 2 640 - 2 645 - 2 740 - 2 745 - 2 840 - 2 845 - 2 940 - 2 945.

2. Pour être divisible par 9 il faut que la somme des chiffres du nombre $2a\,4b$ doit être un multiple de 9.
$2 + a + 4 + b = 9$ ou $2 + a + 4 + b = 18$
$a + b = 3$ ou $a + b = 12$.

Si $a = 0$, alors $b = 3$ et le nombre est 2 043.
Si $a = 1$, alors $b = 2$ et le nombre est 2 142.
Si $a = 2$, alors $b = 1$ et le nombre est 2 241.

Si $a = 3$, alors $b = 0$ et le nombre est 2 340 ou $b = 9$ et le nombre est 2349.
Si $a = 4$, alors $b = 8$ et le nombre est 2 448
Si $a = 5$, alors $b = 7$ et le nombre est 2 547.
Si $a = 6$, alors $b = 6$ et le nombre est 2 646.
Si $a = 7$, alors $b = 5$ et le nombre est 2 745.
Si $a = 8$, alors $b = 4$ et le nombre est 2 844.
Si $a = 9$, alors $b = 3$ et le nombre est 2 943.

3. Les nombres divisibles à la fois par 5 et par 9 sont les nombres communs des 2 listes précédentes : ce sont donc 2 340 et 2 745.

2. PGCD DE DEUX NOMBRES ENTIERS

2.1. Diviseurs communs à deux nombres entiers

On dit que d est un diviseur commun de a et de b si d divise à la fois a et b.

Remarque

Deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont que 1 comme diviseur commun.

✍ Exercice d'application 4

Il existe deux entiers compris entre 20 et 30 qui admettent seulement deux diviseurs.
1. Trouvez ces deux entiers.
2. Les deux nombres trouvés sont-ils premiers entre eux ? Pourquoi ?

Corrigé

1. Les deux nombres cherchés ne doivent avoir que deux diviseurs donc ils sont premiers. S'ils sont premiers ils ne peuvent pas être pairs, donc entre 20 et 30 on peut avoir 21, 23, 25, 27, 29.
Or 21 est impossible car il admet au moins 3 diviseurs : 1, 3 et 21.
25 est impossible car il admet exactement 3 diviseurs : 1, 5, 25.
27 est impossible car il admet au moins 3 diviseurs : 1, 3, 9, 27.

Les deux nombres cherchés sont donc 23 et 29.

2. Comme 23 et 29 admettent uniquement 1 comme diviseur commun, ils sont donc premiers entre eux.

2.2. Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers (PGCD)

> Le PGCD de deux entiers est le plus grand de leurs diviseurs communs.

Remarque

Deux entiers sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1 car le seul diviseur commun aux deux nombres est 1.

2.3. Méthodes pour déterminer le PGCD de deux nombres

❒ Méthode 1 : Enumération de tous les diviseurs

> Pour déterminer le PGCD de deux entiers a et b, on dresse la liste de tous leurs diviseurs.

✍ Exercice d'application 5

1. $30 = \ldots \times \ldots$

a) Rechercher toutes les façons possibles d'écrire 30 sous la forme d'un produit de deux nombres entiers.

b) En déduire la liste des diviseurs de 30.

2. Rechercher la liste des diviseurs de 45.

3. En déduire le PGCD de 30 et 45.

Corrigé

1. a) $30 = 1 \times 30 = 2 \times 15 = 3 \times 10 = 5 \times 6$.

b) La liste des diviseurs de 30 est donc : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30.

2. La liste des diviseurs de 45 est : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45.

3. Les diviseurs communs de 30 et 45 sont donc 5 et 15. Par conséquent le PGCD de 30 et 45 est donc 15.

✍ Exercice d'application 6

1. Donner la liste des diviseurs des nombres suivants :
A = 22 ; B = 25 ; C = 33 ; D = 50.
2. Compléter les égalités suivantes :
PGCD (22 ; 33) = … PGCD (22 ; 50) = …
PGCD (25 ; 33) = … PGCD (25 ; 50) = …
3. Les nombres 25 et 33 sont-ils premiers entre eux ? Justifier votre réponse.

Corrigé

1. Liste des diviseurs de 22 : 1 ; 2 ; 11 ; 22.
Liste des diviseurs de 25 : 1 ; 5 ; 25.
Liste des diviseurs de 33 : 1 ; 3 ; 11 ; 33.
Liste des diviseurs de 50 : 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50.

2. Pour déterminer chacun des PGCD on détermine la liste des diviseurs communs des 2 nombres puis on en prend le plus grand. On définit alors :
PGCD (22 ; 33) = 11 PGCD (22 ; 50) = 2
PGCD (25 ; 33) = 1 PGCD (25 ; 50) = 25.

3. *Méthode 1* : Etant donné que PGCD (25 ; 33) = 1 alors on peut dire que les nombres 25 et 33 sont premiers entre eux.

❒ Méthode 2 : Méthode des soustractions successives

Si d est un diviseur commun de a et de b, alors d divise $a + b$ et $a - b$.
On peut alors écrire que pour $a > b$, on a :

$$\text{PGCD}(a\ ;\ b) = \text{PGCD}(a - b\ ;\ b).$$

Le PGCD est défini comme le dernier reste non nul.

✍ Exercice d'application 7

Calculer le PGCD des nombres suivants en utilisant la méthode des soustractions successives :
1. 504 et 392.
2. 990 et 306.

Corrigé

1.

504	392	280	168	112	56
–	–	–	–	–	–
392	112	112	112	56	56
112	280	168	56	56	0

Le dernier reste non nul représente le PGCD, donc

PGCD (504 ; 392) = 56

2.

990	684	378	306	234	162
–	–	–	–	–	–
306	306	306	72	72	72
684	378	72	234	162	90

Le dernier reste non nul est 18, donc

PGCD (990 ; 306) = 18

90	72	54	36	18
–	–	–	–	–
72	18	18	18	18
18	54	36	18	0

❒ Méthode 3 : Algorithme d'Euclide

(accélération de la méthode 2)

Soient a et b deux entiers, si d est un diviseur commun à a et b et si $a = bq + r$ alors d est aussi un diviseur de r.
Par conséquent si $a = bq + r$ alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r).

Le PGCD est défini comme le dernier reste non nul.

Un algorithme présente la solution d'un problème sous la forme d'une suite d'opérations à effectuer. Le principe de l'algorithme d'Euclide utilise la division euclidienne.

Remarque

Le choix de la méthode s'effectuera en fonction des entiers a et b.
Pour calculer le PGCD de petits nombres, la méthode 1 est préférable.
Pour des nombres bien plus grands, on utilisera la méthode de l'algorithme d'Euclide.

Exercice d'application 8

1. Déterminer le PGCD de 138 et 63 par la méthode des soustractions successives.
2. Retrouver le résultat de la question précédente par la méthode utilisant l'algorithme d'Euclide.
3. Quelle est la méthode qui nécessite le moins de calculs ?

Corrigé

1.

$$\begin{array}{r} 138 \\ -\quad 63 \\ \hline 75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ -\quad 63 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ -\quad 12 \\ \hline 51 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 51 \\ -\quad 12 \\ \hline 39 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39 \\ -\quad 12 \\ \hline 27 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27 \\ -\quad 12 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ -\quad 12 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ -\quad 3 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ -\quad 3 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ -\quad 3 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ -\quad 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Le dernier reste non nul est 3, donc :

PGCD (138 ; 63) = 3

2. Par la méthode de l'algorithme d'Euclide :
PGCD (138 ; 63) = PGCD ($2 \times 63 + 12$; 63) = PGCD (63 ; 12).
PGCD ($5 \times 12 + 3$; 12) = PGCD (12 ; 3) = PGCD (4×3 ; 3) = 3.

PGCD (138 ; 63) = 3

3. La méthode qui nécessite le moins de calculs est la méthode de l'algorithme d'Euclide.

Exercice d'application 9

Marie doit déterminer le PGCD de 2 004 et de 18. Elle souhaite utiliser la méthode des soustractions successives.

1. Est-ce habile ?
2. Déterminer PGCD (2004 ; 18) par la méthode qui vous semble la plus appropriée.

Corrigé

1. Ce n'est pas habile d'utiliser la méthode des soustractions successives car l'écart entre 2 004 et 18 est relativement important.

2. La méthode la plus appropriée semble être la méthode de l'algorithme d'Euclide.
Autre présentation de l'algorithme d'Euclide :

a	b	r	$a = bq + r$
2 004	18	6	$2\,004 = 18 \times 111 + 6$
18	6	0	$18 = 6 \times 3$

Le dernier reste non nul est 6 donc :

PGCD (2004 ; 18) = 6

3. APPLICATIONS

3.1. Simplification de fractions pour les rendre irréductibles

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Pour rendre une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

✍ Exercice d'application 10

Déterminer PGCD (95 ; 228) pour rendre la fraction $\dfrac{95}{228}$ irréductible.

Corrigé

Déterminons le PGCD (228 ; 95) par la méthode de l'algorithme d'Euclide.

a	*b*	*r*	*a* = *bq* + *r*
228	95	48	$228 = 95 \times 2 + 38$
95	38	19	$95 = 2 \times 38 + 19$
38	19	0	$38 = 19 \times 2$

Le dernier reste non nul est 19, donc :

PGCD (228 ; 95) = 19

Ce qui signifie que le plus grand diviseur commun de 228 et 95 est 19.

D'où : $\boxed{\frac{95}{228} = \frac{95 \div 19}{228 \div 19} = \frac{5}{12}}$

3.2. Résolution de problèmes

✍ Exercice d'application 11

Avant de commencer une partie de cartes, les joueurs se partagent exactement 180 jetons rouges et 170 jetons blancs.

Quel est le nombre maximum de joueurs possibles autour de la table ? Et combien ont-ils de jetons chacun ?

Corrigé

Le nombre de jetons rouges et de jetons blancs doit être identiques entre les joueurs, donc pour déterminer le nombre de tas identiques possible on détermine le PGCD (180 ; 170).

Utilisons la méthode de l'algorithme d'Euclide :

a	*b*	*r*	*a* = *bq* + *r*
180	170	10	$180 = 170 \times 1 + 10$
170	10	0	$170 = 17 \times 10$

Le dernier non nul est 10, donc PGCD (180 ; 170) = 10.

Interprétation : il y aura 10 tas comportant le même nombre de jetons rouges et de jetons blancs.

Définissons le nombre de jetons de chaque couleur :

Il y a 180 jetons rouges pour 10 tas donc le nombre de jetons rouges est $180 \div 10 = 18$.

Il y a 170 jetons blancs pour 10 tas donc le nombre de jetons blancs est $170 \div 10 = 17$.

Conclusion : Il y aura 10 tas donc 10 joueurs possédant chacun 18 jetons rouges et 17 jetons blancs.

✍ Exercice d'application 12

Deux livres ont respectivement 480 et 608 pages.
Chacun de ces livres est formé de fascicules, ou cahiers, qui ont tous un même nombre de pages, compris entre 30 et 50.
1. Quel est le nombre de pages d'un cahier ?
2. Quel est le nombre de cahiers qui composent les deux livres ?

Corrigé

1. Comme chacun des deux livres possède le même nombre de cahiers, pour définir le nombre de cahiers on va déterminer le PGCD (608 ; 480).
Utilisons la méthode de l'algorithme d'Euclide :

a	b	r	$a = bq + r$
608	480	128	$608 = 1 \times 480 + 128$
480	128	96	$480 = 3 \times 128 + 96$
128	96	32	$128 = 1 \times 96 + 32$
96	32	0	$96 = 3 \times 32$

Le dernier reste non nul est 32, donc PGCD (608 ; 480) = 32.

Par conséquent les cahiers de chacun des deux livres posséderont 32 pages.

2. Cherchons le nombre de cahiers de chacun des deux livres :
Le livre de 608 pages possédera $608 \div 32 = 19$ cahiers.
Le livre de 480 pages possédera $480 \div 32 = 15$ cahiers.

Conclusion : il y aura 19 cahiers de 32 pages dans le livre de 680 pages, et 15 cahiers de 32 pages dans le livre de 408 pages.

✍ Exercice d'application 13

1. Calculer le PGCD de 110 et 88.
2. Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de long et de 88 cm de large. Il a reçu la consigne suivante : « Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grand possibles, de façon à ne pas avoir de perte ».

Quelle sera la longueur du carré ?

3. Combien de carrés peut-il découper dans cette plaque ?

Corrigé

1. Déterminons le PGCD (110 ; 88) par la méthode des soustractions successives :

$$\begin{array}{r} 110 \\ -\quad 88 \\ \hline 66 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 88 \\ -\quad 66 \\ \hline 22 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 66 \\ -\quad 22 \\ \hline 44 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 44 \\ -\quad 22 \\ \hline 22 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22 \\ -\quad 22 \\ \hline 0 \end{array}$$

Le dernier reste non nul est 22, donc PGCD (110 ; 88) = 22.

2. Sachant que les carrés à découper sur la plaque doivent avoir la même longueur, pour déterminer le nombre de carrés dans la plaque de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur, on utilise le PGCD (110 ; 88).

Or d'après la question précédente PGCD (110 ; 88) = 22,
on peut alors découper des carrés de 22 cm de longueur.

3. Comme nous découpons des carrés de 22 cm de longueur, dans la largeur de la plaque nous en aurons $88 \div 22 = 4$ et dans la longueur de la plaque nous en aurons $110 \div 22 = 5$.

Par conséquent sur cette plaque nous pourrons découper
$5 \times 4 = 20$ carrés de longueur 22 cm.

✍ Exercice d'application 14

Un commerçant reçoit 180 lampes de poche et 405 piles pour ces lampes. Il souhaite les conditionner en lots identiques composés de lampes et de piles, en utilisant toutes les lampes et toutes les piles.

1. Quel est le nombre maximal de lots qu'il peut conditionner ainsi ?
2. Combien de lampe et combien de piles y aura-t-il dans chaque lot ?
3. Chaque lampe utilise une pile. Combien y aura-t-il de piles de rechange dans chaque lot ?

Corrigé

1. Comme le commerçant possède 180 lampes de poche et 405 piles, pour définir le nombre de lots, on définit PGCD (405 ; 180).
Utilisons la méthode de l'algorithme d'Euclide :

a	b	r	$a = bq + r$
405	180	45	$405 = 2 \times 180 + 45$
180	45	0	$180 = 4 \times 45$

Le dernier reste non nul est 45, donc PGCD (405 ; 180) = 45.

Interprétation : le commerçant peut donc réaliser 45 lots identiques.

2. Sachant que le commerçant peut réaliser 45 lots identiques, le nombre de lampes de poche de chaque lot est $180 \div 45 = 4$ et le nombre de piles dans chaque lot est $405 \div 45 = 9$.

Chacun des 45 lots comportera 9 piles et 4 lampes de poche.

3. Comme chaque lampe de poche utilise une pile et qu'il y a dans chaque lot 4 lampes de poche et 9 piles, il y aura donc :

5 piles de rechange dans chaque lot.