1
Généralités sur les fonctions

1. NOTIONS DE BASE

1.1. Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$.
Il est vivement conseillé d'étudier le sens de variation sur **des intervalles** I.

Définitions

f est dite **croissante** si elle conserve l'ordre sur I, c'est-à-dire :
pour **tous** nombres réels $x_1, x_2 \in I$, **si** $x_1 < x_2$, **alors** $f(x_1) \leq f(x_2)$.

f est dite **décroissante** si elle inverse l'ordre sur I, c'est-à-dire :
pour **tous** nombres réels $x_1, x_2 \in I$, **si** $x_1 < x_2$, **alors** $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Si, pour tous nombres réels $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a :
$f(x_1) < f(x_2)$, alors on dit que f est strictement croissante sur I.

Si, pour tous nombres réels $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a :
$f(x_1) > f(x_2)$, alors on dit que f est strictement décroissante sur I.

Une fonction **monotone** sur un intervalle I est une fonction croissante sur (tout) I ou décroissante sur I.

1.2. Fonctions de référence

•La fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par :

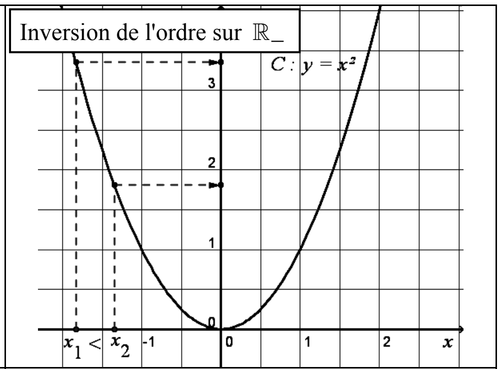
$$f(x) = x^2$$

est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

•Elle est positive sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0.$$

•Sa courbe est une parabole.



•La fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_- = \left]-\infty\ ;\ 0\right[$

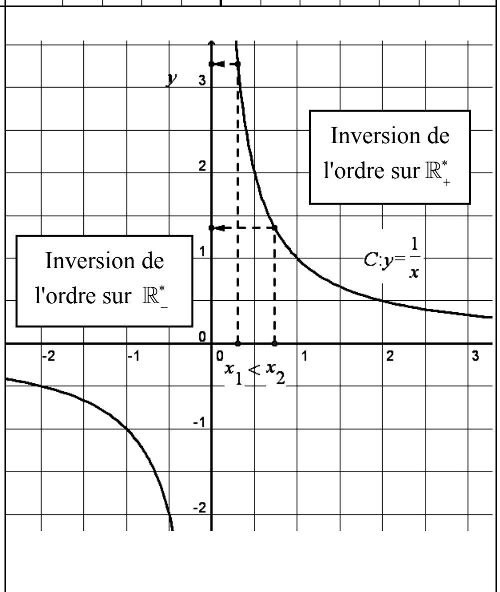
et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+ = \left]0\ ;\ +\infty\right[$.

f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$

En effet, $-2 < 3$, mais $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{3}$.

•Elle est strictement négative sur $\mathbb{R}^*_- = \left]-\infty\ ;\ 0\right[$, strictement positive sur $\mathbb{R}^*_+ = \left]0\ ;\ +\infty\right[$.

•Sa courbe est une hyperbole, formée de deux branches.



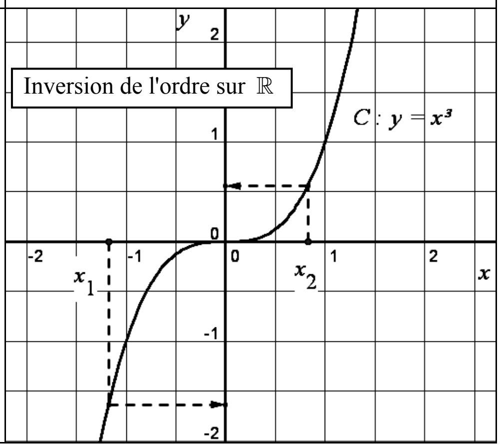
•La fonction cube, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

•Elle est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

•Sa courbe est une cubique



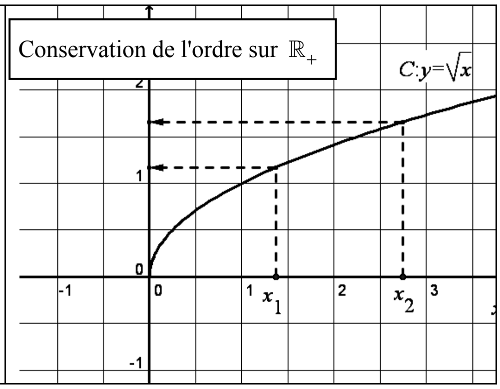
•La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

•Elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.

•Sa courbe est une demi-parabole.



•La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |\,x\,|$$

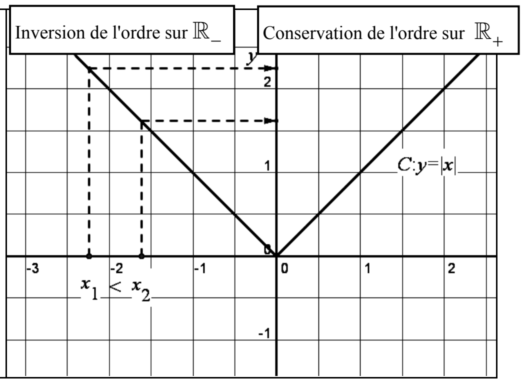
si $x \leq 0$, $f(x) = -x$

si $x \geq 0$, $f(x) = x$

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

•Elle est positive sur $\mathbb{R}$.

•Sa courbe est une la réunion de deux demi-droites.



•Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \cos(x)$, fréquemment noté cos *x*

$g(x) = \sin(x)$, fréquemment noté sin *x*.

Elles sont périodiques de période 2π.

f est strictement croissante sur $[-\pi; 0]$

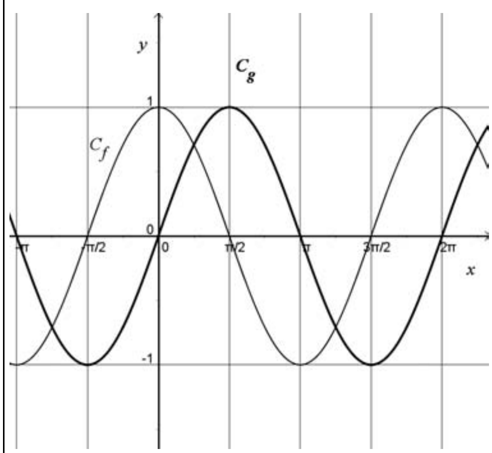
strictement décroissante sur $[0; \pi]$.

g est strictement croissante sur

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

•Leurs courbes sont des "sinusoïdes".



Exercice d'application 1

Comment déterminer le sens de variation par inégalités successives.

Déterminer les variations de $f : x \longmapsto \sqrt{1-x}$ sur son ensemble de définition par inégalités successives.

Corrigé

Déterminons tout d'abord D_f.

f est définie sur l'ensemble des x vérifiant : $1 - x \geq 0$.

$1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Le domaine de définition de f est donc $D_f =]-\infty\,;1]$.

Soient x_1 et $x_2 \in]-\infty\,;1]$ tels que $x_1 < x_2$.

Déterminons l'ordre de leurs images, par inégalités successives.

$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \leq 1 \\ & -x_1 > -x_2 \geq -1 \quad \times(-1) \\ & 1 - x_1 > 1 - x_2 \geq \mathbf{0\ (*)} \quad +1 \end{aligned}$$

On applique la fonction racine carrée, strictement **croissante** sur $\mathbb{R}_+$.

Elle conserve l'ordre, donc **le sens de l'inégalité est conservé.**

$\sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2}$.

Concluons : si x_1 et $x_2 \in]-\infty\,;1]$ et $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$.

$\boxed{f \text{ est donc strictement décroissante sur son ensemble de définition}}$.

Remarque

L'inégalité "≥ 0" dans (*) est une partie importante de la justification, car elle affirme que les nombres auxquels on applique la fonction racine carrée sont bien dans un intervalle où celle-ci est monotone (ici strictement croissante).

⇨ *Pour s'entraîner : exercices 1, 2.*

2. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

2.1. Opérations élémentaires sur les fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur les ensembles de définitions D_f et D_g .
On définit alors :

Fonction	**Description**	**Expression**	**Ensemble de définition**
kf	Produit d'une fonction par une "constante multiplicative" $k \in \mathbb{R}$	$(kf)\,(x) = k \times f(x)$	$D = D_f$
$f + g$	Somme de 2 fonctions	$(f+g)\,(x) = f(x) + g(x)$	$D = D_f \cap D_g$
$f \times g$	Produit de deux fonctions	$(f \times g)\,(x) = f(x) \times g(x)$	$D = D_f \cap D_g$
$\dfrac{f}{g}$	Quotient de deux fonctions	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	D est l'ensemble des $x \in D_f \cap D_g$ tels que $g(x) \neq 0$

2.2. Composition de fonctions

Définition

Fonction	**Description**	**Expression**	**Ensemble de définition**
$g \circ f$	Composée de f, suivie de g	$(g \circ f)\,(x) = g(f(x))$	D est l'ensemble des $x \in D_f$ tels que $f(x) \in D_g$

✍ Exercice d'application 2

Comment composer deux fonctions.

$f : x \longmapsto -\frac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto 3\sqrt{x}$. On définit $h = g \circ f$ et $p = f \circ g$.

1. Déterminer les domaines de définition des fonctions *f* et *g*.

2. Peut-on calculer les nombres suivants ? $h(-1)$, $h(1)$, $p(1)$, $p(0)$.

3. Déterminer le domaine de définition de *h* et *p*, puis donner leurs expressions sur ces ensembles.

Corrigé

1. $D_f = \mathbb{R}^*$ (dénominateur non nul) et $D_g = \mathbb{R}_+$ (radicant positif, le "radicant" étant le nombre situé sous la racine carré).

2. Identifier la première fonction que l'on applique :

Dans $h = g \circ f$, on applique d'abord *f* puis *g*.	Dans $p = f \circ g$, on applique d'abord *g* puis *f*.
$f(-1) = 1 \in D_g$ car $D_g = \mathbb{R}_+$. $h(-1) = g\left(f(-1)\right) = g(1) = 3\sqrt{1} = 3$ $h(-1)$ est bien défini et vaut 3. $f(1) = -1 \notin D_g$ donc $h(1) = g(-1)$ n'est pas défini. ($3\sqrt{-1}$ n'est pas défini).	$g(1) = 3 \in \mathbb{R}^*$ $p(1) = f\left(g(1)\right) = f(3) = -\frac{1}{3}$ $p(1)$ est bien défini et vaut $-\frac{1}{3}$ $g(0) = 0 \notin D_f$ car $D_f = \mathbb{R}^*$. donc $p(0) = f\left(g(0)\right)$ n'est pas défini.

3. On applique le cours sur l'ensemble de définition d'une composée de fonctions.

$$\begin{aligned} x \in D_{g\circ f} &\Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } -\frac{1}{x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x < 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{D_h = D_{g\circ f} = \mathbb{R}_-^*}$$

Sur cet ensemble, on a la succession des fonctions *f* puis *g* :

$$\begin{cases} \qquad\qquad X \xmapsto{g} 3\sqrt{X} \\ x \xmapsto{f} -\frac{1}{x} \xmapsto{g} 3\sqrt{-\frac{1}{x}} \end{cases}$$

On remplace x par $-\frac{1}{x}$ dans l'expression de $g(x)$.

On peut donc écrire : $h(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(-\frac{1}{x}\right) = 3\sqrt{-\frac{1}{x}}$.

$$\boxed{h(x) = 3\sqrt{-\frac{1}{x}}}$$

$$\begin{aligned} x \in D_{f\circ g} &\Leftrightarrow x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } 3\sqrt{x} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } x \neq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{D_p = D_{f\circ g} = \mathbb{R}_+^*}$$

Sur cet ensemble, on a la succession des fonctions g puis f :

$$\begin{cases} \qquad\qquad X \xmapsto{f} -\dfrac{1}{X} \\ x \xmapsto{g} 3\sqrt{x} \xmapsto{f} -\dfrac{1}{3\sqrt{x}} \end{cases}$$

. On remplace x par $3\sqrt{x}$ dans l'expression de $f(x)$.

On peut donc écrire : $p(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(3\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{x}}$.

$$\boxed{p(x) = -\frac{1}{3\sqrt{x}}}$$

⇨ *Pour s'entraîner : exercice 3.*

2.3. Opérations sur les fonctions et sens de variation

Opérations élémentaires et sens de variation

Soit f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I.

Fonction	**Conditions**	**Sens de variation sur *I***
kf	si $k > 0$	kf a le sens de variation de f
	si $k < 0$	kf a le sens contraire de celui de f
$f + g$	si f et g ont le même sens de variation	$f + g$ a le sens de variation de f et g

Remarque

Le produit de deux fonctions croissantes n'est pas nécessairement une fonction croissante, comme dans l'exemple :

$h : x \longmapsto 2x^2$ est non croissante sur $\mathbb{R}$, alors que les fonctions :

$f : x \longmapsto 2x$ et $g : x \longmapsto x$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

✍ Exercice d'application 3

Comment utiliser les opérations élémentaires sur les fonctions de référence.

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

1. $f : x \longmapsto 10x - \dfrac{1}{x}$ $\qquad I = [\,1\,;+\infty\,[$

2. $g : x \longmapsto x^2 - 2x^3 + 1$ $\qquad I$ est à choisir entre $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$.

Indication

Pour g : La fonction carré n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. Il faut donc choisir un "camp" ($\mathbb{R}_-$ ou $\mathbb{R}_+$), de façon à voir g comme la somme de fonctions monotones de même sens de variation.

Corrigé

1. $u : x \longmapsto 10x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur I (fonction affine de coefficient directeur $10 > 0$).

$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur I, car l'intervalle $[\,1;+\infty\,[$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $-1 < 0$, donc $v : x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ est de sens contraire, strictement croissante sur I.

$$\boxed{f = u + v \text{ est donc croissante sur } I}\,.$$

2. $u : x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

$x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_-$.

De plus, $-2 < 0$, donc $v : x \longmapsto -2\,x^3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

$w : x \longmapsto 1$ est constante.

$$\boxed{g = u + v + w \text{ est donc une fonction strictement décroissante sur } \mathbb{R}_-}\,.$$

Conseil

D'abord poser les fonctions qui sont en jeu, en faisant attention aux intervalles sur lesquelles elles sont monotones.

Remarques

Sur $\mathbb{R}_+$, u est strictement croissante et v est strictement décroissante.
On ne peut donc pas conclure sur le sens de variation de $u+v$ par simples opérations élémentaires.

On a utilisé implicitement le fait que la somme d'une fonction strictement décroissante et d'une fonction constante est strictement décroissante.
De façon générale, si f est strictement monotone et g est (simplement) monotone de même sens, $f+g$ est strictement monotone, de même sens que f.

⇨ *Pour s'entraîner : exercice 4.*

2.4. Sens de variation de la composée de deux fonctions

Soit f une fonction monotone sur un intervalle I.
Soit g une fonction monotone sur un intervalle J tel que :

$$(*) \text{ si } x \in I,\ f(x) \in J.$$

Alors :

Fonction	Conditions	Sens de variation sur I
$g \circ f$	si f et g ont le même sens de variation	$g \circ f$ est croissante
	si f et g ont des sens de variation contraires	$g \circ f$ est décroissante

Zoom : pour comprendre la condition (*) sur la "pré-image".

Considérons la fonction $h : x \longmapsto (2-x)^2$.
Alors $h = g \circ f$, où $f : x \longmapsto 2-x$
$g : X \longmapsto X^2$

Un tableau de valeurs, par calcul des images par f puis des images par g donne :

x	$X = 2 - x$ $X = f(x)$	$y = X^2$ $g(X) = g(f(x))$
-2	4	16
$-1{,}5$	3,5	12,5
-1	3	9
$-0{,}5$	2,5	6,5
0	2	4
0,5	1,5	2,25
1	1	1
1,5	0,5	0,25
2	0	0
2,5	$-0{,}5$	0,25
3	-1	1
3,5	$-1{,}5$	2,25
4	-2	4

pré-images

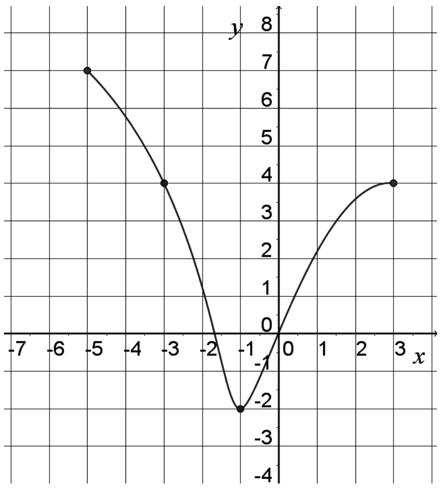
Pour tout $x \in [-2\,;\,2]$, l'image de x par f appartient à $\mathbb{R}^+$, intervalle sur lequel g est strictement croissante.
En quelque sorte, la fonction g ne "voit" alors pas les nombres strictement négatifs, même si $x \in [-2\,;\,0[$, car ces derniers sont d'abord transformés par f.
Une inversion de l'ordre par f, suivie d'une conservation de l'ordre par g donne une inversion de l'ordre par $g \circ f$.

L'ensemble des images par f des nombres appartenant à $[2\,;\,4]$ est inclus dans $\mathbb{R}_-$, intervalle sur lequel g est strictement décroissante.
Une inversion de l'ordre par f, suivie d'une inversion de l'ordre par g donne une conservation de l'ordre par $g \circ f$.

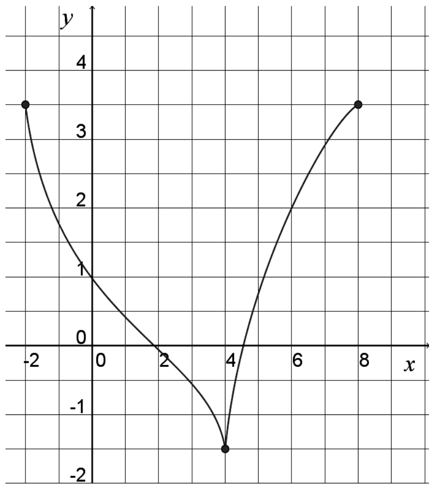
✍ Exercice d'application 4

Soit les fonctions f et g représentées ci-dessous.
f est strictement monotone sur $[-5\,;\,-1]$ et $[-1\,;\,3]$.
g est strictement monotone sur $[-2\,;\,4]$ et $[4\,;\,8]$.

Courbe de f



Courbe de g



Les points dessinés sur les graphiques sont à coordonnées entières ou semi-entières et appartiennent aux courbes.

A l'aide des graphiques, déterminer les variations de $g \circ f$.

Indication

On lit d'abord le sens de variations de g, notamment les abscisses où g change de sens de variation, en l'occurrence en $x = 4$, dans le graphique de droite.
La fonction g étant appliquée aux images par f, cela correspond aux points d'ordonnée $y = 4$ dans le graphique de gauche.
On étudiera donc f sur $\left[-5\,;-3\right]$, $\left[-3\,;-1\right]$ et $\left[-1\,;3\right]$.

Corrigé

1re phase : étude de $g \circ f$ sur $\left[-5\,;-3\right]$.

- Sur $I_1 = \left[-5\,;-3\right]$, la fonction f est strictement décroissante.
- Regardons les pré-images $f(x)$:
  si $x \in I_1$, $f(x) \in \left[4\,;6\right]$ donc $f(x) \in J_1 = \left[4\,;8\right]$.
- g est strictement croissante sur J_1.

On en déduit que $g \circ f$ est strictement décroissante sur $\left[-5\,;-3\right]$.

2^{e} phase : étude de $g \circ f$ sur $\left[-3\,;-1\right]$.

- Sur $I_2 = \left[-3\,;-1\right]$, la fonction f est strictement décroissante.
- Pré-images : de plus, si $x \in I_2$, $f(x) \in J_2 = \left[-2\,;4\right]$.
- g est strictement décroissante sur J_2.

On en déduit que $g \circ f$ est strictement croissante sur $\left[-3\,;-1\right]$.

3ème phase : étude de $g \circ f$ sur $\left[-1\,;3\right]$.

- Sur $I_3 = \left[-1\,;3\right]$, la fonction f est strictement croissante.
- Pré-images : de plus, si $x \in I_3$, $f(x) \in J_2 = \left[-2;4\right]$.
- g est strictement croissante sur J_2.

On en déduit que $g \circ f$ est strictement croissante sur $\left[-1\,;3\right]$.

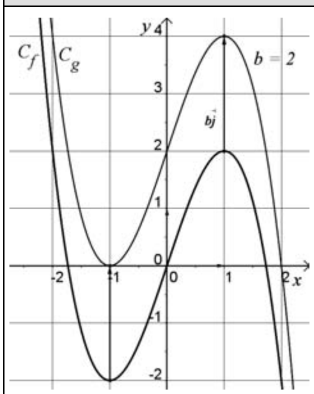
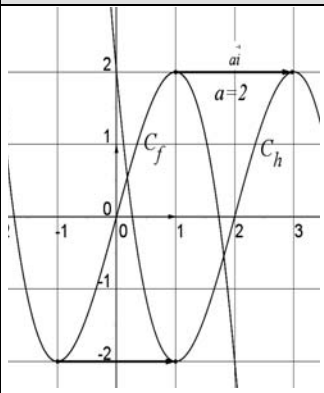
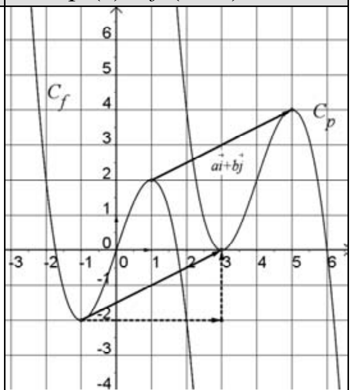
Conclusion

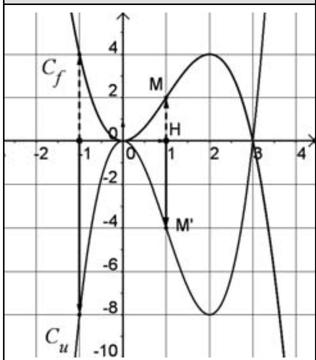
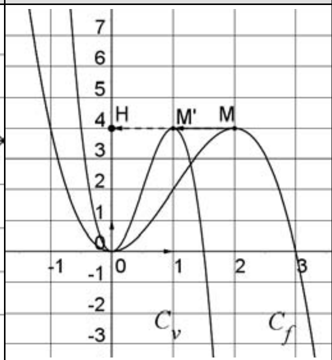
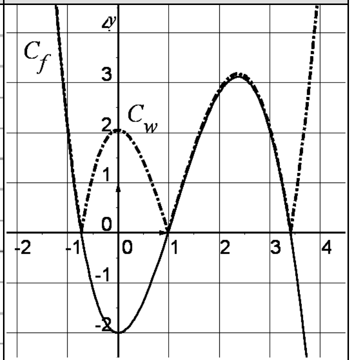
$$\boxed{\begin{array}{c} g \circ f \text{ est strictement décroissante sur } \left[-5\,;-3\right] \\ \text{et strictement croissante sur } \left[-3\,;3\right]. \end{array}}$$

⇨ *Pour s'entraîner : exercice 1.*

3. FONCTIONS ASSOCIEES PARITE ET PERIODICITE

3.1. Courbes des fonctions associées

$g(x) = f(x) + b$	$h(x) = f(x-a)$	$p(x) = f(x-a) + b$
		
$b = 2$	$a = 2$	$a = 4$ et $b = 2$
C_g est image de C_f par translation de vecteur $b\vec{j}$	C_h est image de C_f par translation de vecteur $a\vec{i}$	C_p est image de C_f par translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$

$u(x) = k\,f(x)$	$v(x) = f(k\,x)$	$w(x) = \lvert f(x) \rvert$
		
$k = -2$	$k = 2$	$w(x) = -f(x)$ si $f(x) \leq 0$
C_u est image de C_f par "dilatation" de rapport -2 et de direction (Oy).	C_v est image de C_f par "dilatation" de rapport 1/2 et de direction (Ox).	On transforme par symétrie uniquement les points de C_f situés sous l'axe (Ox).

En particulier, dans un repère orthogonal,
$C_u : y = -f(x)$ est l'image de C_f par symétrie orthogonale par rapport à (Ox).
$C_v : y = f(-x)$ est l'image de C_f par symétrie orthogonale par rapport à (Oy).
$C_n : y = -f(-x)$ est l'image de C_f par symétrie centrale par rapport à O.

⇨ *Pour s'entraîner : exercice 5.*

3.2. Parité et périodicité

Propriété	**Définition**	**Interprétation graphique (dans un repère orthogonal)**
f est paire	Pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$	C_f est symétrique par rapport à l'axe (Oy)
f est impaire	Pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$	C_f est symétrique par rapport à O
f est périodique de période T (où $T > 0$)	Pour tout $x \in D_f$, $x + T$ et $x - T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$	C_f est invariante par translation de vecteur $-T\,\vec{i}$ ou $T\,\vec{i}$

Remarque

Si f est périodique de période T, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(x + k\,T) = f(x)$.

✍ Exercice d'application 5

Comment étudier la parité d'une fonction.
Soit les fonctions :

$f : x \longmapsto \dfrac{1}{27}\left(x^7 - 256x^3\right)$ et $g : x \longmapsto \left(x^2 - 2x + 5\right)\left(x^2 + 2x + 5\right)$

Etudier leurs parités.

Corrigé

$D_f = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$f(-x) = \dfrac{1}{27}\left((-x)^7 - 256(-x)^3\right) = \dfrac{1}{27}\left(-x^7 + 256x^3\right)$ car les exposants sont impairs.

$f(-x) = -\dfrac{1}{27}\left(x^7 - 256x^3\right)$.

$f(-x) = -f(x)$

$\boxed{f \text{ est impaire}}$

$D_g = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$g(-x) = \left((-x)^2 - 2\times(-x) + 5\right)\left((-x)^2 + 2\times(-x) + 5\right)$

$g(-x) = \left(x^2 + 2x + 5\right)\left(x^2 - 2x + 5\right) = \left(x^2 - 2x + 5\right)\left(x^2 + 2x + 5\right)$

$g(-x) = g(x)$

$\boxed{g \text{ est paire}}$

Remarque

Les fonctions dont l'expression est somme de termes en x^n où ***n* est pair** sont paires. Leurs courbes sont symétriques par rapport à (Oy).

Exemples : $f : x \longmapsto x^4 - 3x^2 + 4$, $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x^{2006}} + 2007\,x^{2008}$.

Les fonctions dont l'expression est somme de termes en x^n où ***n* est impair** sont impaires. Leurs courbes sont symétriques par rapport à O.

Exemples : $u : x \longmapsto x^{11} - 3x^3 + 4x$, $v : x \longmapsto \dfrac{1}{x^{2009}} + 2008\,x^{2007}$.

"Beaucoup" de fonctions ne sont ni paires, ni impaires.

Exemples : $p : x \longmapsto x^{11} - 3x^3 + 4$, $q : x \longmapsto x^{2008} + x^{2009}$.

✍ Exercice d'application 6

Comment démontrer la périodicité d'une fonction.

Soit la fonction $f : x \longmapsto \sin(5\pi x) + \cos(3\pi x)$.
On rappelle que les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ périodiques de période 2π.

Montrer que f est périodique de période 2.

Corrigé

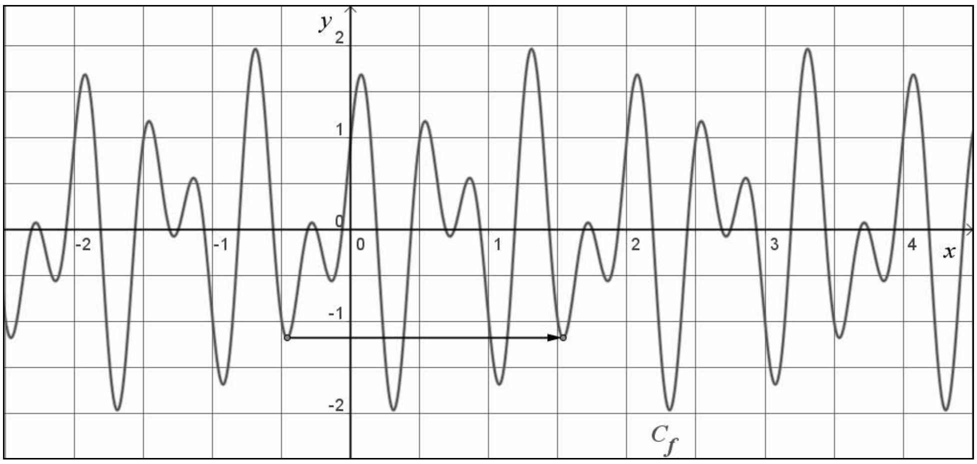
$D_f = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 2$ et $x - 2 \in \mathbb{R}$ et
$f(x + 2) = \sin(5\pi(x + 2)) + \cos(3\pi(x + 2))$.
$f(x + 2) = \sin(5\pi x + 10\pi) + \cos(3\pi x + 6\pi)$.

Or les fonctions sin et cos sont 2π - périodiques.

D'après la remarque du 3.2,
$\sin(5\pi x + 5 \times 2\pi) = \sin(5\pi x)$ et $\cos(3\pi x + 3 \times 2\pi) = \cos(3\pi + x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2) = \sin(5\pi x) + \cos(3\pi x)$, soit : $f(x + 2) = f(x)$.

$\boxed{f \text{ est donc périodique de période 2}}$



⇨ *Pour s'entraîner : exercices 6 et 7.*

3.3. Autres éléments de symétrie

Condition	Interprétation graphique (dans un repère orthogonal)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Si, pour tout h tel que $a+h \in D_f$, on a : $a-h \in D_f$ et : $f(a+h)=f(a-h)$	C_f est symétrique par rapport à l'axe $\Delta : x = a$
Soit a et $b \in \mathbb{R}$. Si, pour tout h tel que $a+h \in D_f$, on a : $a-h \in D_f$ et : $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$	C_f est symétrique par rapport au point O'(a ; b)

✍ Exercice d'application 7

Comment trouver les éléments de symétrie à partir d'une expression.

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{2x^2-6x+1}{x-3}$.

Montrer que la courbe de f dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à un point dont on précisera les coordonnées.

Indication

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Si la courbe C_f admet un centre de symétrie, l'abscisse de ce dernier vaut nécessairement 3, car D_f n'est centré qu'en 3.

(On peut éventuellement contrôler à l'aide de la calculatrice.)

Corrigé

$3+h \in D_f \Leftrightarrow 3+h \neq 3 \Leftrightarrow h \neq 0$. Dans ce cas, $3-h \neq 3$ donc $3-h \in D_f$.

Calculons, pour $h \neq 0$, $\frac{f(3+h)-f(3-h)}{2}$.