1
Arithmétique : nombres premiers et division euclidienne

1. MULTIPLES ET DIVISEURS D'UN ENTIER

1.1. Définition

Soit a et b deux entiers relatifs. Dire que b divise a signifie qu'il existe un entier relatif k tel que a = kb. Dans ce cas on dit aussi que b est un diviseur de a ou encore que a est un multiple de b.

Remarques

- 0 est un multiple de tout entier relatif.
- 0 est le seul multiple de 0.
- 1 et –1 divisent tout entier relatif.
- Les seuls diviseurs de 1 et –1 dans l'ensemble des entiers relatifs sont 1 et –1.
- Soit a un entier relatif ; a et –a ont les mêmes diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

✍ Exercices d'application 1

1.

a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 24 dans $\mathbb{Z}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

(1) $ab = 24$ avec $a \leq b$;

(2) $x^2 = 4y^2 + 24$.

2. Déterminer les entiers relatifs n tels que 2n + 3 divise 12.

Corrigé

1. a) Les diviseurs de 24 dans $\mathbb{Z}$ sont –24 ; –12 ; –8 ; –6 ; –4 ; –3 ; –2 ; –1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24.
b) (1) Soit S l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels tels que ab = 24 et $a \leq b$.

$$S = \{(1 \; ; \; 24), \; (2 \; ; \; 12), \; (3 \; ; \; 8), \; (4 \; ; \; 6)\}.$$

(2) $x^2 = 4y^2 + 24$ équivaut à $x^2 - 4y^2 = 24$ soit $(x - 2y)(x + 2y) = 24$.
Si on pose : a = x – 2y et b = x + 2y alors b est un entier naturel car x et y sont des entiers naturels et comme le produit ab est positif a est également un entier naturel.
De plus $x - 2y \leq x + 2y$ car $y \geq 0$ donc $a \leq b$. Par conséquent $(a \; ; \; b) \in S$.
D'autre part, a + b = 2x donc a + b est un entier pair et b – a = 4y d'où a – b est un multiple de 4. Aucun couple de S ne vérifie ces deux conditions.

L'équation proposée n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}$.

Remarque

Il aurait été très maladroit, ici, de résoudre les 4 systèmes d'équations correspondants aux 4 couples possibles pour (a ; b). D'une manière générale, d'ailleurs, il faut toujours essayer de réduire le nombre de cas à étudier en cherchant des conditions supplémentaires.

2. Les diviseurs de 12 dans $\mathbb{Z}$ sont : –12 ; –6 ; –4 ; –3 ; –2 ; –1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.
Or 2n + 3 est un entier impair donc $2n + 3 \in \{-3 \; ; \; -1 \; ; \; 1 \; ; \; 3\}$. On en déduit que :

$$\boxed{n \in \{-3 \; ; \; -2 \; ; \; -1 \; ; \; 0\}.}$$

Remarque

De même que ci-dessus, il serait trop laborieux de faire les calculs avec tous les diviseurs de 12.

1.2. Propriétés

Soit a, b, c trois entiers relatifs non nuls.
(1) Si a divise b et b divise c alors a divise c.

(2) Si c divise a et b alors c divise toute combinaison linéaire de a et de b c'est-à-dire : c divise tous les entiers relatifs de la forme au + bv, où u et v sont des entiers relatifs.
(3) Si a divise b alors $|a| \le |b|$. Il en résulte que tout entier relatif non nul admet un nombre fini de diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

✍ Exercice d'application 2

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A_n = 7^{2n} - 2^n$ est un multiple de 47.

Corrigé

- Si n = 0 alors $A_n = 0$ et 0 est bien un multiple de 47. Donc la propriété est vraie pour n = 0.
- Soit n un entier naturel. Supposons que A_n est un multiple de 47 et montrons que A_{n+1} est un multiple de 47.

$A_{n+1} = 7^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 49 \times 7^{2n} - 2.2^n$. On peut écrire $A_{n+1} = 49(7^{2n} - 2^n) + 47\times 2^n$. Soit $A_{n+1} = 49\, A_n + 47\times 2^n$. Or, par hypothèse de récurrence, A_n est un multiple de 47 et 47×2^n est un multiple de 47, donc, d'après la propriété (2) ci-dessus, A_{n+1} est un multiple de 47.
- D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

Pour tout entier naturel n, A_n est un multiple de 47.

Remarque

Par la suite nous verrons d'autres méthodes plus rapides pour démontrer ce résultat.

1.3. Factorisation de $a^n - b^n$

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
Pour tout entier naturel n, $a^n - b^n$ est un multiple de a – b et si $n \ge 1$ alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k .$$

Corollaire

Si n est un entier naturel impair, alors $a^n + b^n$ est un multiple de a + b.

✍ Exercices d'application 3

1. Refaire l'exercice 2 ci-dessus sans utiliser de raisonnement par récurrence.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $13^n + 23$ est un multiple de 12.

Corrigé

1. $A_n = 49^n - 2^n$. Donc A_n est divisible par a – b avec a = 49 et b = 2.
Donc A_n est divisible par 47.

Pour tout entier naturel n, A_n est un multiple de 47.

(Plus simple que la première méthode! Non ?...)

2. $13^n + 23 = 13^n - 1^n + 24$. Or $13^n - 1^n$ est un multiple de (13 – 1) donc de 12. De plus 24 est un multiple de 12.
Donc, d'après la propriété (2) du paragraphe **1.2**, il en résulte que :

$13^n + 23$ est un multiple de 12.

2. NOMBRES PREMIERS

2.1. Définition

Un nombre premier est un entier naturel admettant exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$.

✍ Exercice d'application 4

Faire la liste des 15 premiers entiers naturels premiers.

Corrigé

Les 15 premiers entiers naturels premiers sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47.

Remarques

- 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.
- 2 est le seul nombre premier pair.

2.2. Propriétés

(1) Tout entier naturel, au moins égal à 2, admet au moins un diviseur premier.
(2) Il existe une infinité de nombres premiers.
(3) Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Si n n'est pas premier alors n admet au moins un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.

Conséquence : test de primalité

Si un entier naturel n, supérieur ou égal à 2, n'admet aucun diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$ alors n est premier.

Exercices d'application 5

1. Deux nombres premiers sont jumeaux si leur différence est égale à 2.
Montrer que 2789 et 2791 sont deux nombres premiers jumeaux.

2. Les nombres de Mersenne sont les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel.
Montrer que, pour que $2^n - 1$ soit premier, il faut que n soit premier.
La réciproque est elle vraie ?

Corrigé

1. $52 \leq \sqrt{2789} < 53$ et $52 \leq \sqrt{2791} < 53$.

On vérifie que 2789 et 2791 ne sont divisibles par aucun de nombres premiers au plus égaux à 52 (il s'agit des 15 nombres premiers trouvés à l'exercice 4).

Donc 2789 et 2791 sont premiers et sont des nombres premiers jumeaux.

2. Supposons que n n'est pas premier.

- Si $n = 0$ alors $2^n - 1 = 0$ et 0 n'est pas premier.
- Si $n = 1$ alors $2^n - 1 = 1$ et 1 n'est pas premier
- Si $n \geq 2$ alors n admet au moins un diviseur premier p et $p < n$ puisque n n'est pas premier.

Il existe donc un entier naturel q tel que $n = pq$ et $2^n - 1 = (2^p)^q - 1^q$.
D'après **1.3**, $2^n - 1$ est divisible par $2^p - 1$.
Or $1 < p < n$ d'où $1 < 2^p - 1 < 2^n - 1$.

Donc $2^n - 1$ admet au moins 3 diviseurs et n'est pas premier.

On vient de monter que si n n'est pas premier alors $2^n - 1$ n'est pas premier, par conséquent :

pour que $2^n - 1$ soit premier il faut que n soit premier.

La réciproque est fausse : on vérifie aisément que $2^{11} - 1$ n'est pas premier et pourtant 11 est premier.

Culture maths !

- En janvier 2007 le plus grand couple de nombres premiers jumeaux connu est $2003663613.\ 2^{195\,000} \pm 1$ (a été découvert par le français Eric Vautier le 25 janvier 2007). Ces nombres s'écrivent avec 58 711 chiffres en écriture décimale.
- En septembre 2006 le plus grand nombre premier de Mersenne connu est :

$$2^{32\,582\,65} - 1.$$

C'est le 44^e nombre premier de Mersenne noté M44 et il s'écrit avec 9808358 chiffres en écriture décimale. C'est aussi le plus grand nombre premier connu en septembre 2006.

2.3. Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

Théorème fondamental

Tout entier naturel n au moins égal à 2 peut être décomposé de manière unique en un produit de nombres premiers tel que :

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

où les p_i sont des nombres premiers tels que $p_i < p_{i+1}$ et les α_i des entiers naturels non nuls.

Applications

- Les diviseurs positifs de n sont les entiers de la forme $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$ avec β_i entier tel que $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.
- Le nombre de diviseurs de n est $N = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)$.

Exercices d'application 6

1. Décomposer 16758 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs positifs de 16758 ?
2. Dresser la liste des diviseurs positifs de 3381 (on peut s'aider d'un arbre).

Corrigé

1. $16758 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 19$ donc le nombre de diviseurs positifs de 16758 est :
$N = 2 \times 3 \times 3 \times 2$ soit :

$$\boxed{N = 36.}$$

2. $3381 = 3 \times 7^2 \times 23$. Donc les diviseurs de 3381 dans $\mathbb{N}$ sont :
$1 ; 3 ; 7 ; 7^2 ; 2 \times 3 ; 3 \times 7 ; 3 \times 7^2 ; 3 \times 23 ; 7 \times 23 ; 7^2 \times 23 ; 3 \times 7 \times 23 ; 3 \times 7^2 \times 23.$
Soit D l'ensemble des diviseurs positifs de 3381 :

$$D = \{1 ; 3 ; 7 ; 49 ; 23 ; 21 ; 147 ; 69 ; 161 ; 1127 ; 483 ; 3381\}$$

et dans l'ordre croissant :

$$\boxed{D = \{1 ; 3 ; 7 ; 21 ; 23 ; 49 ; 69 ; 147 ; 161 ; 483 ; 1127 ; 3381\}.}$$

3. DIVISION EUCLIDIENNE

3.1. Théorème et définition

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul. Il existe un unique entier relatif q et un unique entier naturel r tels que a = bq + r et r < b.
On effectue ainsi la division euclidienne de a par b.

a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste de la division de a par b.

Généralisation

Soit a et b deux entiers relatifs ($b \neq 0$). Il existe un unique entier relatif q et un unique entier naturel r tels que a = bq + r et $r < |b|$.

Remarque

b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

✍ Exercices d'application 7

1. Déterminer le quotient q et le reste r de la division de a par b dans les cas suivants :
   (1) a = 1321, b = 57 ;
   (2) a = – 1321, b = 57 ;
   (3) a = 1321, b = – 57 ;
   (4) a = –1321, b = – 57.
2. Déterminer les entiers naturels b de 4 chiffres tels que les restes de la division de 26412 et de 42630 par b soient respectivement 321 et 483.
3. Déterminer les entiers naturels a, non nuls, tels que le reste de la division de a par 35 soit égal au carré du quotient.
4. Clara est née le 7 juin 2007. C'était un jeudi. Quel jour de la semaine fêtera-t-elle son 18^{e} anniversaire ? (Attention aux années bissextiles ! On rappelle que les années bissextiles sont les années multiples de 4 sauf les années multiples de 100 et non multiples de 400 (2000 était une année bissextile mais 1900 n'en était pas une)).

Corrigé

1. (1) $1321 = 23 \times 57 + 10$: **q = 23 et r = 10.**
(2) $-1321 = -24 \times 7 + 47$: **q = – 24 et r = 47.**
(3) $1321 = -23 \times (-57) + 10$: **q = – 23 et r = 10.**
(4) $-1321 = 24 \times (-57) + 47$: **q = 24 et r = 47.**

2. Il existe des entiers naturels q et q' uniques tels que :
26412 = bq +321 et 42530 = bq' + 483 d'où bq = 26091 et bq' = 42147.
b est un diviseur commun de 26091 et de 42147 compris entre 1000 et 9999.

Or $26091 = 3^2 \times 13 \times 223$ et $42147 = 3^{3\times} 7 \times 223$ et le seul diviseur commun à 4 chiffres de ces deux nombres est 9×223 soit 2007.

$$\boxed{b = 2007}$$

3. Soit q le quotient de la division de a par 35. On a donc $a = 35q + q^2$ avec $q^2 < 35$ soit $0 < q < 6$ (q ne peut pas être nul car a est non nul).

$$q \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$$

$$\boxed{a \in \{36\ ;\ 74\ ;\ 114\ ;\ 156\ ;\ 200\}.}$$

4. Soit n le nombre de jours séparant la naissance de Clara de son 18^{e} anniversaire.
$n = 18 \times 365 + p$ où p est le nombre d'années bissextiles au cours de ces 18 années.
Les années bissextiles de 2007 à 20025 sont 2008, 2012, 2016, 2020, 2024. Il y a donc 5 jours correspondants aux 29 février à rajouter. D'où :

$$\boxed{n = 6575}$$

Pour savoir quel jour tombera le 7 juin 2025 il suffit de savoir combien de semaines entières s'écouleront jusqu'à cette date et de compter le nombre de jours restants. Ce qui revient à chercher le reste r de la division de n par 7.
Or $6575 = 7 \times 939 + 2$. Donc il se passera 939 semaines et 2 jours jusqu'au 18^{e} anniversaire de Clara.

Son jour de naissance étant un jeudi, Clara aura 18 ans un samedi.

Elle pourra donc faire une grande fête le soir même de ses 18 ans !
Joyeux Anniversaire Clara !

3.2. Congruences dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soit n un entier naturel non nul et (a; b) un couple d'entiers relatifs. Dire que a et b sont congrus modulo n signifie que a et b ont même reste dans la division par n.

On note alors : $a \equiv b$ (mod.n) ou $a \equiv b\ [n]$.

En particulier :
- $a \equiv r$ (mod.n) où r est le reste de la division de a par n.
- $n \equiv 0$ (mod.n).
- $a \equiv a$ (mod.n).

Théorème

Deux entiers relatifs a et b sont congrus modulo n si et seulement si $a - b$ est un multiple de n c'est-à-dire : s'il existe un entier relatif k tel que, $a - b = kn$.

Propriétés

n est un entier naturel non nul et a, b, c, d sont des entiers relatifs
(1) a est un multiple de n si et seulement si $a \equiv 0$ (mod.n).
(2) $a \equiv b$ (mod.n) $\Leftrightarrow b \equiv a$ (mod.n).
(3) Si $a \equiv b$ (mod.n) et $b \equiv c$ (mod.n) alors $a \equiv c$ (mod.n).
(4) Si $a \equiv b$ (mod.n) et $c \equiv d$ (mod.n) alors $a + c \equiv b + d$ (mod.n) et $ac \equiv bd$ (mod.n).

Conséquence : si $a \equiv b$ (mod.n) alors pour tout entier naturel p, $a^p \equiv b^p$ (mod.n).

✍ Exercices d'application 8

1. Refaire l'exercice **2.** en utilisant les congruences.
2. Refaire l'exercice **3.2.** en utilisant les congruences.
3.
a) Déterminer les restes de la division par 29 de 7^n pour :

$$n \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}.$$

En déduire le reste de la division par 29 de 7^{12}.
b) Quel est le reste de la division par 29 de 1515^{2008} ?
4. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n^4 - 2$ soit un multiple de 7.
5. Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Quel est le reste de la division par 4 de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{4} k^n$? (On distinguera deux cas).

Corrigé

1. Il s'agit de montrer que $A_n \equiv 0$ (mod.47).
On a $7^{2n} = 49^n$. Or $49 \equiv 2$ (mod.47) donc $7^{2n} \equiv 2^n$ (mod.47).
Par conséquent $A_n \equiv 2^n - 2^n$ (mod.47) soit $A_n \equiv 0$ (mod.47).

A_n est un multiple de 47.

2. De même que ci-dessus, montrons que $13^n + 23 \equiv 0$ (mod.12).
$13 \equiv 1$ (mod.12) donc $13^n \equiv 1$ (mod.12). D'où $13^n + 23 \equiv 24$ (mod.12).
Or $24 \equiv 0$ (mod.12), il en résulte que : $13^n + 23 \equiv 0$ (mod.12).

$13^n + 23$ est un multiple de 12.

Remarque

Les deux exemples ci-dessus illustrent bien la simplification qu'apporte l'utilisation des congruences dans les raisonnements de divisibilité. Il faut y penser.

3. a) Soit r le reste de la division euclidienne de 7^n par 29. r est le seul entier naturel tel que $r < 7$ et $7^n \equiv r$ (mod.29).
- Si **n = 1** alors **r = 7**.
- Si **n = 2** alors $7^n = 49$ et $49 \equiv 20$ (mod.29) donc **r = 20**.
- Si **n = 3** alors $7^n = 7^2 \times 7$ donc $7^n \equiv 20 \times 9$ (mod.29) or $20 \times 9 = 180$ et $180 = 6 \times 29 + 6$ d'où **r = 6**.
- Si **n = 4** alors $7^n = 7^3 \times 7$ donc $7^n \equiv 6 \times 7$ (mod.29) soit $7^n \equiv 13$ (mod.29) et **r = 13**.
- Si **n = 5** alors $7^n = 7^4 \times 7$ d'où $7^n \equiv 13 \times 7$ (mod.29) donc $7^n \equiv 91$ (mod.29) soit $7^n \equiv 4$ (mod.29) et **r = 4**.
- Si **n = 6** alors $7^n = 7^5 \times 7$ donc $7^n \equiv 4 \times 7$ (mod.29) soit $7^n \equiv 28$ (mod.29) et **r = 28**.

Or $28 \equiv -1$ (mod.29) par conséquent $7^6 \equiv -1$ (mod.29). Il en résulte que $7^{12} \equiv (-1)^2$ (mod.29).

Le reste de la division de 7^{12} par 29 est 1.

b) $1515 = 29 \times 52 + 7$ donc $1515 \equiv 7$ (mod.29) et $1515^{2008} \equiv 7^{2008}$ (mod.29)
Or $2008 = 167 \times 12 + 4$ donc $7^{2008} = (7^{12})^{167} \times 7^4$ d'où $7^{2008} \equiv 7^4$ (mod.29) puisque $7^{12} \equiv 1$ (mod.29).
D'après a) il en résulte que $7^{2008} \equiv 13$ (mod.29).

Le reste de la division de 1515^{2008} par 29 est 13.

4. $n^4 - 2$ est un multiple de 7 si et seulement si $n^4 - 2 \equiv 0$ (mod.7) c'est-à-dire $n^4 \equiv 2$ (mod.7).
Soit n un entier naturel et r le reste de la multiplication de n par 7.
$r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $n^4 \equiv r^4$ (mod.7) et si on note r' le reste de la division de r^4 par 7 alors $n^4 \equiv r'$ (mod.7).
Le tableau ci-dessous donne les valeurs de r' selon les valeurs de r.

r	0	1	2	3	4	5	6
r'	0	1	2	4	4	2	1

Remarque

$4 \equiv -3 \pmod 7$, $5 \equiv 2 \pmod 7$, $6 \equiv -1 \pmod 7$. On peut donc déduire des résultats obtenus pour 1, 2, 3 les valeurs de r' pour r = 4, 5, 6.
D'après ce tableau $n^4 \equiv 2 \pmod 7$ si et seulement si r = 2 ou r = 4.

$n^4 - 2$ est un multiple de 7 si et seulement si $n = 7k + 2$ ou $n = 7k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$

5. $S_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n$. Or si n est au moins égal à 2 alors $4^n \equiv 0 \pmod 4$ et 2^n est divisible par 4 donc $2^n \equiv 0 \pmod 4$.
D'où $S_n \equiv 1 + 3^n \pmod 4$.
De plus $3 \equiv -1 \pmod 4$, par conséquent $3^n \equiv (-1)^n \pmod 4$.
Il en résulte que si n est un entier pair $3^n \equiv 1 \pmod 4$ et si n est un entier impair $3^n \equiv -1 \pmod 4$.
Donc $S_n \equiv 2 \pmod 4$ si n est pair et $S_n \equiv 0 \pmod 4$ si n est impair.
Conclusion :
- si n est pair alors le reste de la division de S_n par 4 est 2.
- si n est impair le reste de la division de S_n par 4 est nul.

Dans ce cas S_n est un multiple de 4.

3.3. Principaux critères de divisibilité

Ecriture d'un entier dans le système de numération décimal

Soit N un entier naturel non nul. Il existe un unique entier naturel n, tel que $10^n \leq N < 10^{n+1}$ et N s'écrit d'une manière unique sous la forme :
$a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$ où les a_i sont des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 et $a_n \neq 0$.
On note alors $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont les chiffres de l'écriture décimale de N.

Remarque

a_0 est le chiffre des unités, a_1 est le chiffre des dizaines etc.

Critères de divisibilité usuels

Soit N un entier naturel non nul. $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ dans le système de numération décimal.
- N est divisible par 10 si et seulement si $a_0 = 0$.
- N est divisible par 2 si et seulement si a_0 est pair.
- N est divisible par 5 si et seulement si $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$.

♦ N est divisible par 3 si et seulement si $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ est divisible par 3 c'est-à-dire si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
♦ N est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
♦ N est divisible par 4 si et seulement si $\overline{a_1a_0}$ est divisible par 4 c'est-à-dire, si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
♦ N est divisible par 25 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25.
♦ N est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme de ses chiffres de rang pair à partir de la droite est divisible par 11.

✍ Exercices d'application 9

Dans ces exercices tous les entiers naturels sont écrits dans le système de numération décimal

1. Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier N = $\overline{3x2y}$ soit divisible par 3 et par 4.
2. Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier N = $\overline{3xy68}$ soit divisible par 9 et par 11.
3. Déterminer les chiffres x et y pour que N = $\overline{28xy5}$ soit divisible par 11 et par 25.

Corrigé

1. N est divisible par 4 si et seulement si $\overline{2y}$ est un multiple de 4 donc :

y = 0 ou y = 4 ou y = 8.

♦ Si **y = 0** alors N = $\overline{3x20}$ et N est divisible par 3 si et seulement si x + 5 est un multiple de 3. Soit :

x = 1 ou x = 4 ou x = 7.

♦ Si **y = 4** alors N = $\overline{3x24}$ et N est divisible par 3 si et seulement si x + 9 est un multiple de 3 donc :

x = 0 ou x = 3 ou x = 6 ou x = 9.

♦ Si **y = 8** alors n = $\overline{3x28}$ et N est divisible par 3 si et seulement si x + 13 est un multiple de 3 donc

$x = 2$ ou $x = 5$ ou $x = 8$.

Les couples (x ; y) tels que n est divisible par 3 et par 4 sont donc les couples :

$$\boxed{(1 ; 0), (4 ; 0), (7 ; 0), (0 ; 4), (3 ; 4), (6 ; 4), (9 ; 4), (2 ; 8), (5 ; 8), (8 ; 8).}$$

Remarque

Il était plus simple ici de commencer par la divisibilité par 4 qui permet de trouver directement les valeurs de y.

2. ♦ N est divisible par 9 si et seulement si $x + y + 17$ est un multiple de 9 soit $x + y + 17 \equiv 0 \pmod{9}$, ce qui donne $x + y \equiv 1 \pmod{9}$ car $-17 = -2 \times 9 + 1$.
Or x et y sont des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 donc :

$x + y = 1$ ou $x + y = 10$.

♦ N est divisible par 11 si et seulement si $(8 + y + 3 - 6 - x)$ est un multiple de 11 soit $y - x \equiv 6 \pmod{11}$. Or $-9 \leq y - x \leq 9$ D'où :

$y - x = -5$ ou $y - x = 6$.

♦ Or $(x + y) + (y - x) = 2y$ donc $(x + y) + (y - x)$ est un entier naturel pair donc la seule possibilité est :

$x + y = 10$ et $y - x = 6$.

On en déduit **$y = 8$ et $x = 2$.**

$$\boxed{N = 32868.}$$

3. N est divisible par 25 si et seulement si $\overline{y5}$ est un multiple de 25 d'où :

$$\boxed{y = 2 \text{ ou } y = 7}$$

♦ Si **$y = 2$** alors $N = \overline{28x25}$ et N est divisible par 11 si et seulement si :
$(5 + x + 2 - 10)$ est un multiple de11 donc si $x - 3$ est un multiple de 11.
La seule solution, sachant que x est un entier naturel inférieur ou égal à 9, est :

$$\boxed{x = 3}$$

♦ Si **$y = 7$** alors $N = \overline{28x75}$.
N est divisible par 11 si et seulement si $(5 + x + 2 - 15)$ est un multiple de 11 donc si $x - 8$ est un multiple de 11. D'où :

$$\boxed{x = 8}$$

n est divisible par 25 et 11 si et seulement si (x ; y) = (3 ; 2) ou (x ; y) = (8 ; 7).