I

Trinôme du second degré

I. POLYNOMES

1. Polynôme

Un polynôme de degré n est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui s'écrit sous la forme $x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ où a_n, a_{n-1}, …, a_0 sont des nombres réels et $a_n \neq 0$.

2. Racines

On dit que α est une racine d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$.

3. Factorisation

On dit que P se factorise par $(x-\alpha)$ si l'on peut trouver un polynôme Q tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

4. Théorème

Un polynôme P se factorise par $(x-\alpha)$ si et seulement si α est une racine de P.

II. TRINOME DU SECOND DEGRE

1. Trinôme du second degré

Un trinôme du second degré est un polynôme de degré 2 de la forme $x \to ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et a est non nul.

2. Forme canonique du trinôme du second degré

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

3. Racines et signe du trinôme du second degré

Soit P le trinôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$. On appelle discriminant de P le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- si $\Delta < 0$, P n'a pas de racine et $P(x)$ est toujours du signe de a. De plus, on ne peut pas factoriser P.

- Si $\Delta = 0$, P a une racine double $\frac{-b}{2a}$ et $P(x)$ est toujours du signe de a.

  De plus P se factorise sous la forme $P(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

- Si $\Delta > 0$, P a deux racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. De plus P se factorise sous la forme $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Le signe de $P(x)$ est celui de a en dehors des racines et celui de $-a$ entre les racines.

4. Variation et représentation graphique du trinôme du second degré

- si $a > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$P(x)$		$\searrow$	$P\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

- si $a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$P(x)$		$\nearrow$	$P\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$	

On obtient la représentation graphique de $x \to a(x - \alpha)^2 + \beta$ a partir de celle de $x \to ax^2$ par une translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$.

Des exercices pour comprendre

☺ Exercice 1 (3 min)

Parmi les fonctions suivantes, indiquer les polynômes et le cas échéant, donner leur degré.

a) $x^3 - 3x + 1$ b) $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ c) $x^3 + \sqrt{2x} + 1$

d) $x + \dfrac{1}{x}$ e) $x + 1 + x^5$ f) $(x+1)^3$

g) $x(x+1)$ h) $\dfrac{1}{x}(x^2 - x)$

☺ Exercice 2 (20 min)

Sans utiliser le discriminant, factoriser chacun des polynômes suivants et faire un tableau de signe. On précisera les racines. Certains d'entre eux ne peuvent pas être factorisés, expliquer pourquoi.

a) $(x+1)^2 - 9$ b) $x^2 + 1$ c) $x^2 + 10x + 25$

d) $(x-3)^2 - 5$ e) $(x-3)^2 + 5$ f) $4(x+3)^2 - 5$

☺ Exercice 3 (15 min)

1. Soit P le polynôme défini par $P(x) = (x-1)^2 + 4$.

a) Soit u et v deux nombres réels, compléter les trous :

$$1 < u < v$$
$$\Leftrightarrow ... < u - 1 < v - 1$$
$$\Rightarrow (u-1)^2 \ ... \ (v-1)^2 \text{ car } \ldots$$
$$\Rightarrow (u-1)^2 + ... < (v-1)^2 + ...$$
$$\Rightarrow P(u) \ ... \ P(v).$$

b) Que peut-on en déduire sur le sens de variation de P ?

c) En vous inspirant de ce qui a été fait précédemment, démontrer que P est décroissant sur $]-\infty \,;\, 1]$.

2. Soit Q définit par $Q(x) = (x+2)^2 - 3$. En vous inspirant de ce qui a été fait à la question **1**, démontrer que Q est croissant sur $[-2\,;+\infty[$ et décroissant sur $]-\infty\,;-2]$.

☺ Exercice 4 (10 min)

1. Soit P le polynôme donné par $P(x)=2x^2+4x-6$, montrer que : $P(x)=2(x-1)(x+3)$.
2. Soit Q le polynôme défini par $Q(x)=x^2+x-2$. Déterminer le nombre réel a tel que $Q(x)=(x-1)(x-a)$. Calculer $Q(a)$.
3. Soit F le polynôme défini par $F(x)=x^2-x-2$. Calculer $F(2)$. En déduire une factorisation de F.

☺ Exercice 5 (5 min)

Compléter les pointillés en utilisant les identités remarquables :

a) $x^2+2x+...=(x+...)^2$
b) $x^2-6x+...=(x+...)^2$
c) $x^2+x+...=(x+...)^2$
d) $x^2-5x+...=(x-...)^2$
e) $x^2+\sqrt{2}x+...=(x+...)^2$
f) $x^2-2x+...=(-x+...)^2$

☺ Exercice 6 (15 min)

Mettre sous forme canonique les trinômes suivants en suivant le modèle :

$$x^2+6x+5=x^2+6x+3^2-3^2+5=\left(x+3\right)^2-4.$$

a) x^2+6x+1
b) x^2-3x+1
c) $x^2-12x+36$
d) $3x^2+6x+3$
e) $3x^2+6x-3$
f) $-3x^2+6x+3$

☺ Exercice 7 (5 min)

Chacun des polynômes suivants s'écrivent sous la forme ax^2+bx+c. Reconnaître a, b et c ; calculer le discriminant Δ et en déduire le nombre de racines.

Polynôme	a	b	c	Δ	Nombre de racines
a) $2x^2+3x-3$					
b) $-3x^2+x+3$					
c) $-2x+3+x^2$					
d) $x^2+3-\sqrt{2}x+1$					

☺ Exercice 8 (20 min)

Déterminer les racines des trinômes suivants et mettre chacun d'eux sous forme factorisée. En déduire un tableau de signe.

a) $x^2 - x - 6$ b) $x^2 - x - \dfrac{15}{4}$ c) $3x^2 + \dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{3}$

d) $-3x^2 + \dfrac{6}{35}x + \dfrac{3}{35}$ e) $7x^2 + 3x - 2$ f) $7x^2 + 3x + 2.$

☺ Exercice 9 (15 min)

Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

a) $3x^2 + 4x + 1 = 0$ b) $-3x^2 + 4x + 2 > 0$ c) $x^2 + 4x + 4 > 0$

d) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ e) $3x^2 + 4x + 1 = x^2 + 3$ f) $-3x^2 + 4x + 2 < 3x + 1$

☺ Exercice 10 (5 min)

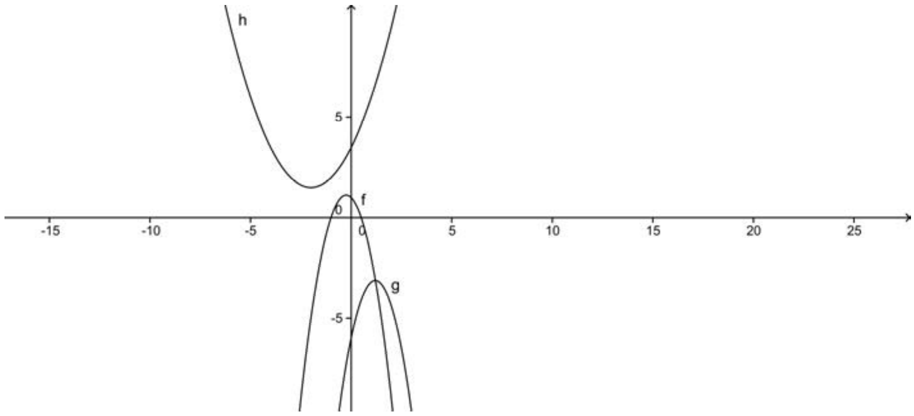
Soit P un polynôme du second degré avec $P(x) = ax^2 + bx + c$ et soit Δ son discriminant.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes.

1. Si Δ est positif alors P est positif.
2. Si Δ est strictement positif alors P n'a pas de racines.
3. Si Δ est nul alors P est toujours du même signe.
4. Si $\Delta < 0$ alors on ne peut pas factoriser P.
5. Si $P > 0$ alors $\Delta < 0$.
6. Si $P < 0$ alors $\Delta > 0$.

😐 Exercice 11 (15 min)

A. (**Q. C. M.**) Soit f le polynôme dont on fournit la représentation graphique suivante, avec $f(x) = ax^2 + bx + c$ et soit Δ son discriminant. Une et une seule réponse est bonne. Les questions ne sont pas indépendantes.



1. a) $a \geq 0$ b) $a \leq 0$ c) on ne peut pas déterminer le signe de a.
2. a) $\Delta \geq 0$ b) $\Delta \leq 0$ c) on ne peut pas déterminer le signe de Δ.
3. a) $c \geq 0$ b) $c \leq 0$ c) on ne peut pas déterminer le signe de c.

B. Recommencer le Q.C.M. avec g puis avec h.

☺ Exercice 12 (5 min)

Donner les tableaux de variations des trinômes P et Q définis par :
$P(x) = -3x^2 + 9x - 1$ et $Q(x) = 2x^2 + x - 1$.

☹ Exercice 13 (5 min)

Soit P et Q deux trinômes du second degré dont on donne les tableaux de variations.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$P(x)$		↘	3	↗	

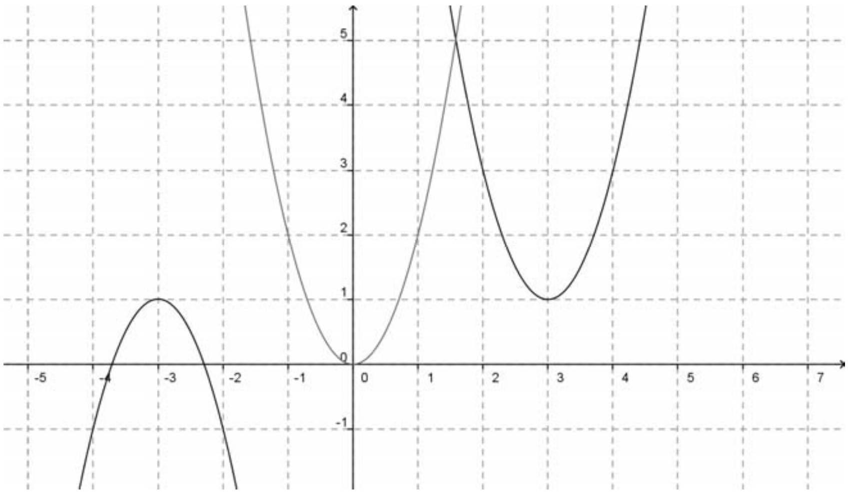
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$Q(x)$		↗	5	↘	

On sait de plus que $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $|a| = 2$ et que $Q(x) = ux^2 + vx + w$ avec $|u| = 1$.

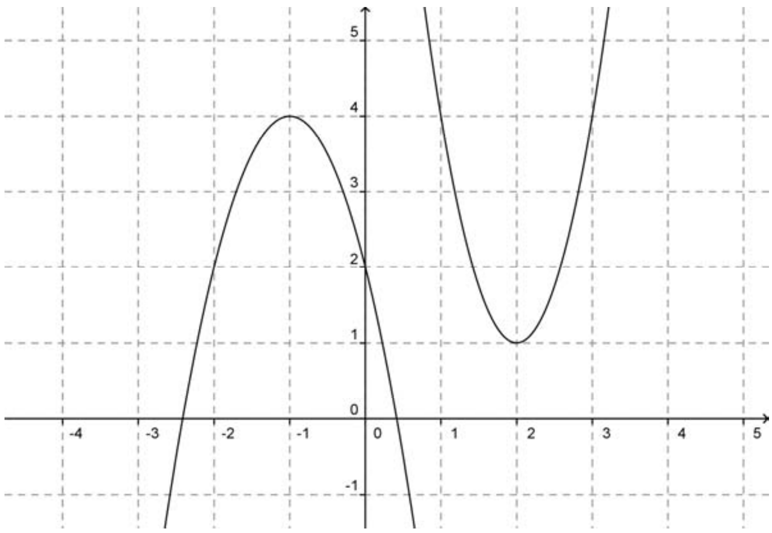
Déterminer P et Q.

☹ Exercice 14 (15 min)

1. La parabole au centre est la représentation graphique du trinôme $2x^2$. Déterminer les formes canoniques des trinômes dont les représentations graphiques sont les deux autres paraboles.



2. Déterminer les formes canoniques des trinômes dont les représentations graphiques sont les paraboles données ci-dessous.



☺ Exercice 15 (5 min)

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^2 + bx + c,$ ou b et c sont des réels.
On suppose que 2 et -5 sont les deux racines de P.
Montrer que $b = 3$ et que $c = -10$.

☺ Exercice 16 (5 min)

Déterminer b et c pour que 1 et 2 soient les racines de $x^2 + bx + c$.

☹ Exercice 17 (30 min)

1. Soit Q le polynôme défini par $Q(x) = x^2 + bx + c,$ ou b et c sont des réels.
On suppose que Q possède deux racines x_1 et x_2. Exprimer, à l'aide de x_1 et x_2, la forme factorisée de Q. En déduire que $b = -(x_1 + x_2)$ et $c = x_1 x_2$.

2. Soit x_1 et x_2 deux réels quelconques, on pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$. Montrer que x_1 et x_2 sont les deux racines de $Q(x) = x^2 - Sx + P$.

3. Justifier que les solutions du système $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 9 \end{cases}$ sont également les solutions de $x^2 - 7x + 9 = 0$. Résoudre alors le système.

4. Résoudre le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ xy = 3 \end{cases}$.

L'interro (1 h) « facile ? »

Exercice 1 (20 min ; 7 points)

1. Donner le domaine de définition de f si $f(x) = \sqrt{-3x^2 + x + 1}$.

2. Résoudre $\dfrac{6}{x+1} \geq x + 2$.

3. Factoriser $-x^3 + x^2 + x$.

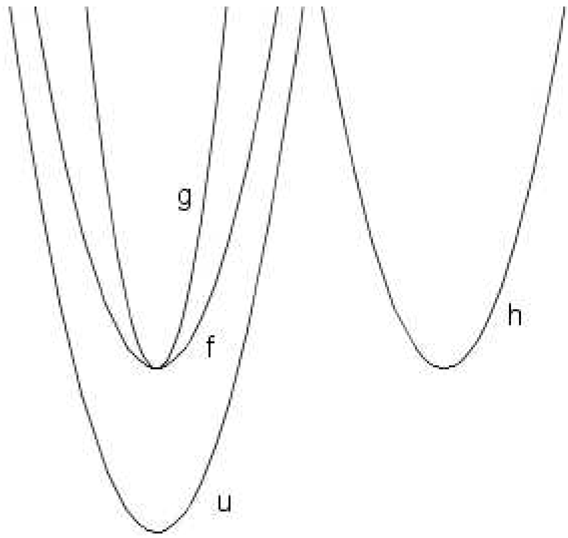
4. Expliquer pourquoi $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$ est factorisable par $x + 3$.

Exercice 2 (10 min ; 3 points)

En comparant les paraboles les unes par rapport aux autres retrouver les expressions des fonctions u, f, g, h parmi les trinômes suivant (on mettra sous forme canonique les deux trinômes qui ne le sont pas encore). Il n'est pas demandé de justifier votre réponse.

a. $(x-5)^2-1$ b. $x^2-10x+28$

c. $x^2-14x+52$ d. $3(x-5)^2+3$



Exercice 3 (15 min ; 5 points)

1. Chercher les valeurs de m telles que $-4m^2-4m+1=0$. On s'empressera de simplifier le résultat.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$ et Q_m le trinôme défini par $Q_m(X)=mX^2-X+1+m$. Faire les représentations graphiques dans les cas $m=-1$, $m=1$ et $m=2$. On précisera dans chaque cas le nombre de racines (graphiquement).
3. Montrer que les valeurs de m pour lesquels Q_m possède une racine double sont $m=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ou $m=\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$ (on pourra utiliser les résultats de la question **1** sans les redémontrer).
4. On pose $m=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Le trinôme $\frac{\sqrt{2}-1}{2}X^2-X+1+\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ne possède donc qu'une racine double X_1. Calculer X_1. Même question avec $m=\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$.

Exercice 4 (15 min ; 5 points)

Soit *f* et *g* les polynômes définis par $f(x)=x^2+2x+2$ et $g(x)=-x^2+2x+3$. On note G_f et G_g leurs graphes respectifs.