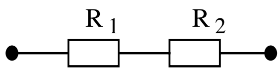
Circuits en courant continu

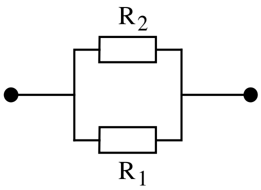
Exercice 1

On considère les trois montages suivants :

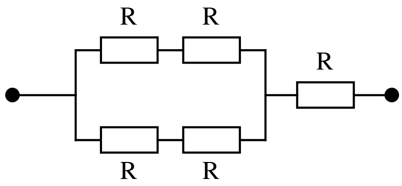
montage 1



montage 2



montage 3



1) Montrer que le premier montage équivaut à une résistance unique R_{eq} telle que :

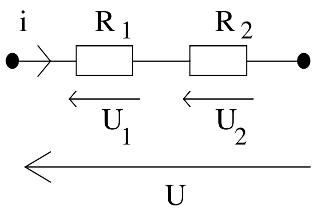
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

2) Montrer que le deuxième montage équivaut à une résistance unique R_{eq} telle que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

3) A l'aide des équivalences précédentes, donner la valeur de la résistance équivalente au montage 3.

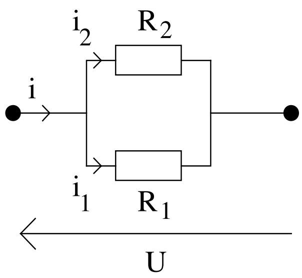
1) Considérons un courant i parcourant le dipôle :



Nous avons : $U = U_1 + U_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i$. Comme la résistance d'un dipôle est définie par $R_{eq} = \frac{U}{i}$, on obtient ici :

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

2) En reprenant la méthode précédente, on obtient :



Nous avons alors : $i = i_1 + i_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)U$

Comme la résistance d'un montage est définie par la relation $R = \frac{U}{i}$, on en déduit ici :

$R = \frac{U}{i} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$ soit : $\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

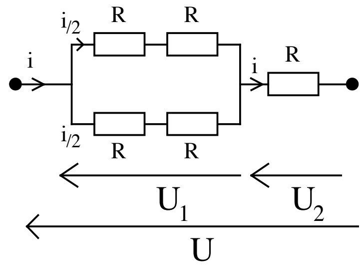
3) Le bloc en dérivation est équivalent à 2R en dérivation avec 2R. L'ensemble équivaut donc à une simple résistance R.
Nous avons ainsi au total :

$$\boxed{R_{eq} = R + R = 2R}$$

Remarques

1) Les formules des équivalences $R_{eq} = \Sigma R_i$ *(montage en série) et* $\frac{1}{R_{eq}} = \Sigma \frac{1}{R_i}$ *(montage en dérivation) doivent être parfaitement maîtrisées. En particulier, n résistors de résistances R montés en dérivation équivalent à un résistor unique de résistance* $R_{eq} = \frac{R}{n}$*. Dans les exercices et problèmes, on trouve souvent les cas n = 2 ou n = 3.*

2) Il y a deux méthodes pour calculer une résistance équivalente :
a) On trouve le schéma équivalent avec des résistances montées en série et en dérivation. Il suffit ensuite d'appliquer les formules des équivalences pour trouver la résistance de la totalité du montage.
b) A partir d'une intensité totale i (ou I), on étudie la répartition des intensités dans les différentes branches et on calcule la tension totale U aux bornes du montage. On cherche alors la relation liant U et i et on calcule la résistance équivalente par $R_{eq} = \frac{U}{i}$.
Appliquer à la troisième question de l'exercice, cette méthode s'utiliserait de la manière suivante :
Le courant total i se sépare en deux courants identiques $\frac{i}{2}$ *dans les deux branches montées en dérivation puisque les résistances de ces deux branches sont identiques.*



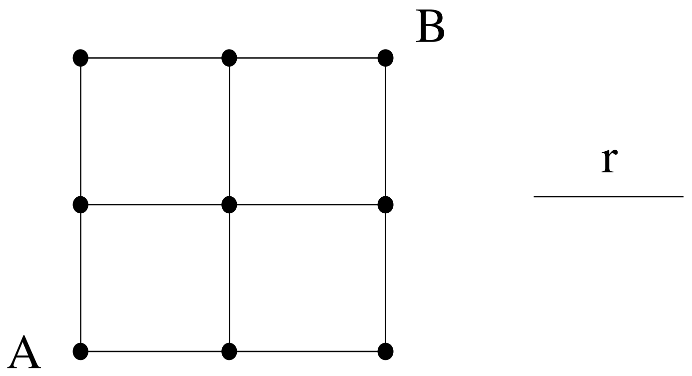
On en déduit pour les tensions : $U = U_1 + U_2 = (2R)\frac{i}{2} + Ri = 2Ri$

d'où $R_{eq} = \frac{U}{i} = 2R$

L'exercice suivant montre comment on peut utiliser les deux méthodes sur un exemple plus complexe.

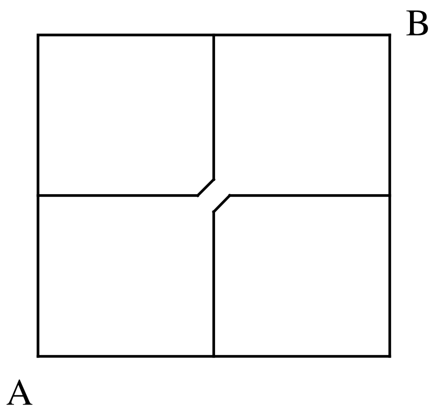
Exercice 2

Chaque branche du réseau suivant a une résistance r. Quelle est la résistance équivalente entre les sommets A et B ?

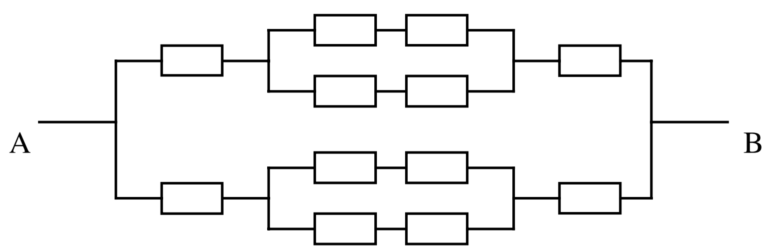


Utilisons les deux méthodes vues dans la remarque de l'exercice précédent :

1) Passage au montage des résistances équivalentes



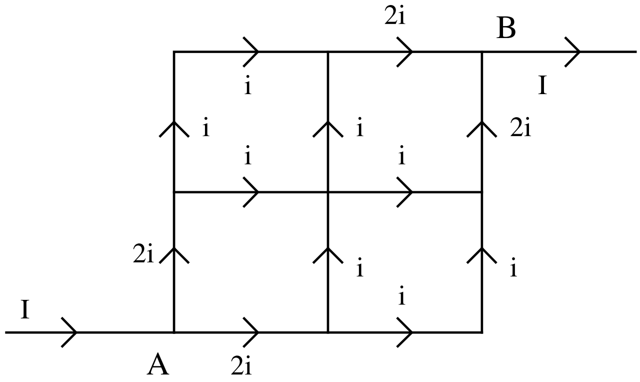
L'axe AB étant un axe de symétrie, les courants se répartissent symétriquement de part et d'autre de cet axe. Il en résulte que l'on peut déconnecter les fils au centre. Le montage équivaut alors à :



Chaque branche valant 3r, la résistance R_{AB} vaut :

$$\boxed{R_{AB} = \frac{3}{2} r}$$

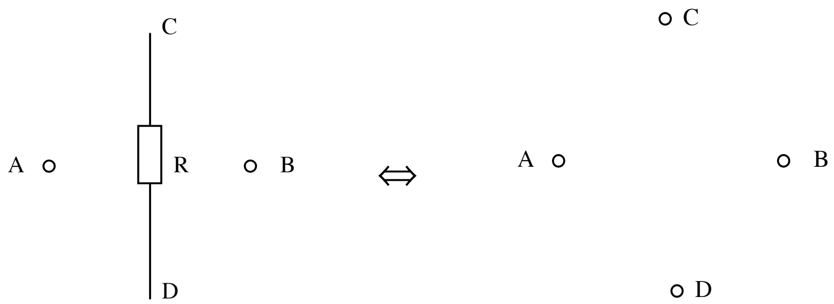
2) Etude de la répartition des intensités
Cette méthode consiste à étudier la répartition des intensités et à identifier la formule $U_{AB} = R_{AB}I$ avec celle obtenue en calculant U_{AB} le long d'un parcours sur le réseau.
Ici, la répartition des intensités est la suivante :



On en déduit sur un parcours extérieur $U_{AB} = 2ri + ri + ri + 2ri = 6ri$. Comme $I = 4i$, on en tire $U_{AB} = \frac{3}{2} rI = R_{AB}I$ d'où :

$$\boxed{R_{AB} = \frac{3}{2} r}$$

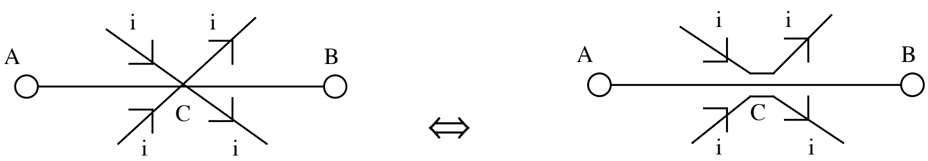
Remarque
Dans ce genre d'exercice, il faut analyser les symétries et leurs conséquences sur la répartition des intensités, de manière à ne pas se lancer dans des calculs trop lourds. Les principaux cas sont les suivants :
1)



Axe de symétrie CD   Axe de symétrie CD

Les points de l'axe CD ont même potentiel $\frac{V_A + V_B}{2}$ *et le courant est nul dans la branche CD. On peut donc supprimer toute résistance de l'axe CD.*

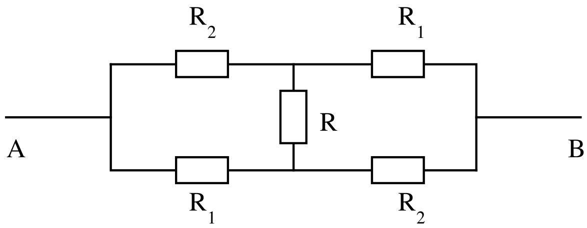
2)



Axe de symétrie AB   Axe de symétrie AB

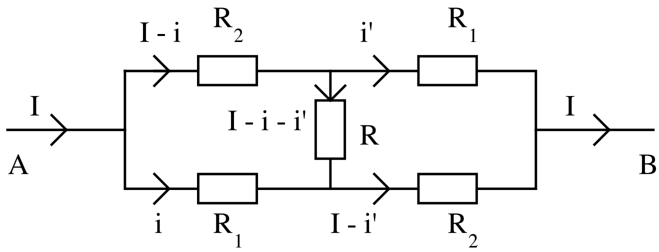
Les courants sont symétriques de part et d'autre de l'axe AB. Si un nœud C appartient à l'axe, tout se passe comme s'il n'existait pas.

Exercice 3



1) Exprimer la résistance R_{AB} en fonction de R_1, R_2 et R.
2) Le résultat pour $R_1 = R_2$ était-il prévisible ?

1)



Le calcul de U_{AB} en suivant les branches inférieure et supérieure donne :

$$U_{AB} = R_1 i + R_2 (I - i') = R_2 (I - i) + R_1 i' \text{. On en déduit } i = i'.$$

La maille intérieure donne alors :

$$R_2 (I - i) + R(I - 2i) - R_1 i = 0 \;\Rightarrow\; i = \frac{R + R_2}{R_1 + R_2 + 2R} I$$

D'autre part :

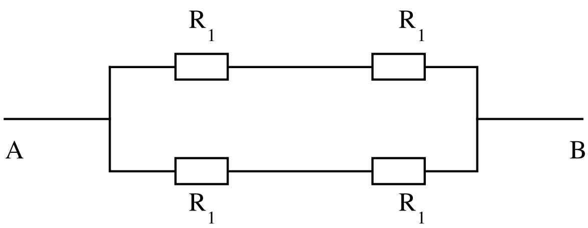
$$U_{AB} = R_2 (I - i) + R_1 i = \frac{2R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R}{R_1 + R_2 + 2R} I = R_{AB} I$$

D'où :

$$\boxed{R_{AB} = \frac{2R_1 R_2 + R_1 R + R_2 R}{R_1 + R_2 + 2R}}$$

2) Si $R_1 = R_2$, la formule donne : $\boxed{R_{AB} = R_1 = R_2}$

Le résultat était prévisible sans calcul car le montage devient symétrique et la résistance R ne joue aucun rôle car elle n'est parcourue par aucun courant. Nous avons alors en la déconnectant :

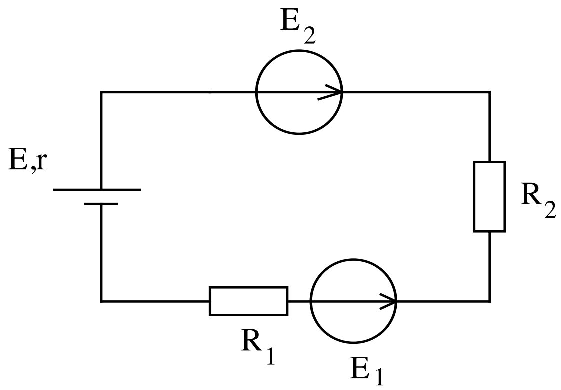


D'où :

$$\boxed{R_{AB} = R_1}$$

Exercice 4

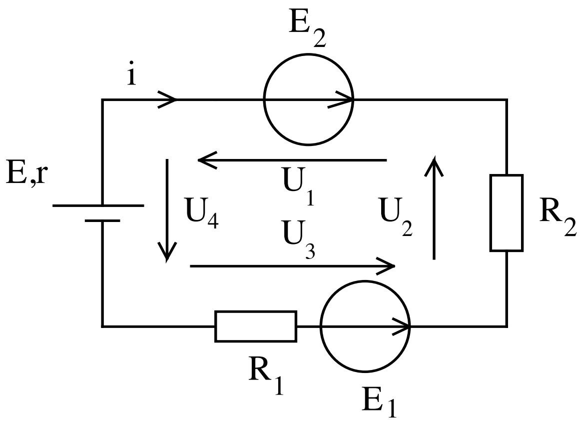
On considère le circuit série suivant :



$E = 3\ \text{V}$ $E_1 = 2\ \text{V}$ $E_2 = 1\ \text{V}$ $R = 5\ \Omega$ $R_1 = 15\ \Omega$ $R_2 = 60\ \Omega$

Déterminer le sens et la valeur de l'intensité parcourant le circuit i.

Choisissons arbitrairement un sens de parcours et appliquons la loi des mailles :



Nous pouvons écrire :

$$\sum \mathrm{U} = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_3 + \mathrm{U}_4 = 0$$

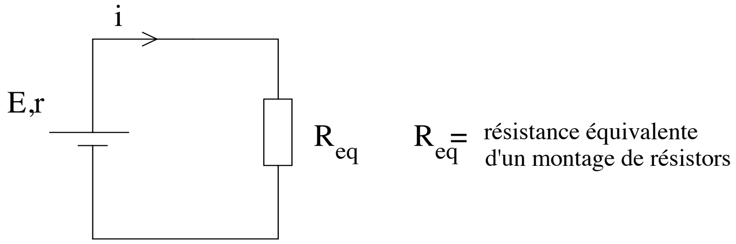
soit : $$-\mathrm{E}_2 + \mathrm{R}_2\mathrm{i} + \mathrm{E}_1 + \mathrm{R}_1\mathrm{i} - \mathrm{E} + \mathrm{ri} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{i} = \frac{\mathrm{E} + \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1}{\mathrm{r} + \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2} = 50\mathrm{mA}}$$

Remarques

1) Cet exercice illustre la loi de Pouillet qui affirme que dans un circuit série, l'intensité est telle que $i = \dfrac{\sum E_i - \sum E_k}{\sum R_i}$ *où les* E_i *correspondent aux f.e.m orientées dans le sens de parcours et les* E_k *à celles orientées en sens inverse.*

Cette relation est fondamentale pour calculer très rapidement des intensités dans un montage série et sera utilisée dans les exercices suivants. Ainsi, dans tous les exercices où l'on rencontrera un montage du type :



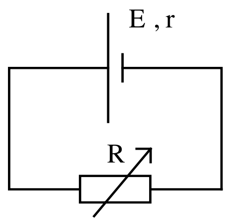
on écrira directement : $i = \dfrac{E}{r + R_{eq}}$

Notons que l'application de la loi de Pouillet donne directement le résultat de l'exercice sans aucun calcul intermédiaire.

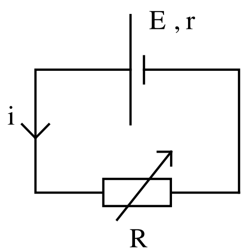
2) Dans le cas où l'application numérique de la loi de Pouillet donne une valeur négative, cela signifie simplement que le courant passe en sens inverse.

Exercice 5

Un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r alimente une résistance R variable.



Déterminer la valeur de R pour laquelle la puissance consommée par la résistance variable est maximale.



Nous avons $P = Ri^2$ avec $i = \dfrac{E}{R+r} \Rightarrow P = \dfrac{R}{(R+r)^2}E^2$

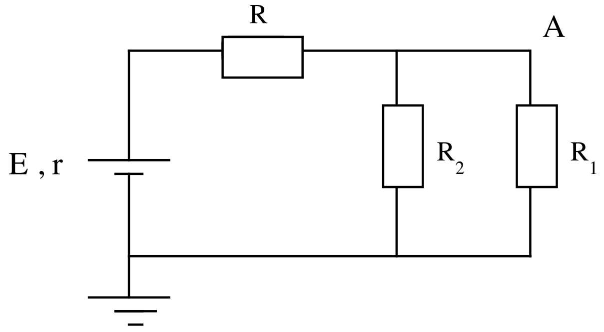
On peut s'apercevoir que la puissance consommée par R est nulle dans les cas extrêmes $R = 0$ ou $R = +\infty$. P passe donc par un maximum pour :

$$\frac{dP}{dR} = 0 = \frac{(R+r)^2 - 2(R+r)R}{(R+r)^4}E^2 = \frac{r-R}{(R+r)^3}E^2$$

La puissance sera donc maximale pour : $\boxed{R = r}$

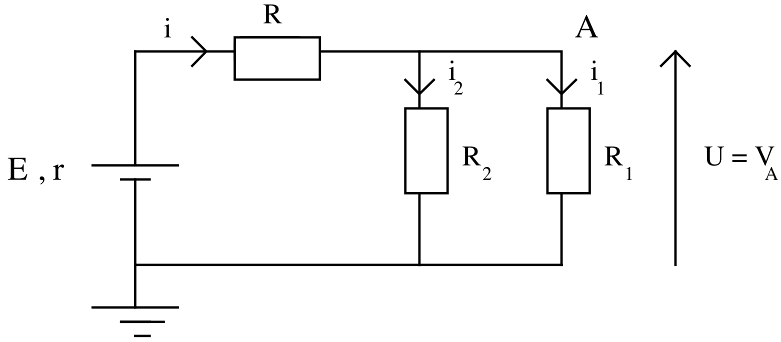
Exercice 6

La masse est par convention au potentiel zéro. Exprimer le potentiel du point A en utilisant différentes méthodes.



Méthode 1 : utilisation des lois de Kirchhoff

Soit i le courant débité par le générateur, i_1 le courant traversant R_1, i_2 le courant traversant R_2.



Nous avons : $V_A = R_1 i_1 = R_2 i_2 = E - (R + r)i$ avec $i = i_1 + i_2$

On en déduit $i_1 = \dfrac{V_A}{R_1}$, $i_2 = \dfrac{V_A}{R_2}$ et par suite : $V_A = E - (R + r)(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2})V_A$

D'où : $V_A = \dfrac{E}{1 + (R + r)(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2})} \Rightarrow \boxed{V_A = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + (R + r)(R_1 + R_2)} E}$

Méthode 2 : technique du diviseur de tension

Les deux résistances en parallèle sont équivalentes à une résistance $R_{eq} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Nous avons alors un simple diviseur de tension et :

$$V_A = \frac{R_{eq}}{R + r + R_{eq}} E \Rightarrow \boxed{V_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + (R + r)(R_1 + R_2)} E}$$