1. La définition d'Euclide

On trouve dans les *Éléments* d'Euclide une première définition du **nombre d'or**, à l'occasion du partage d'un segment *en extrême et moyenne raison*.

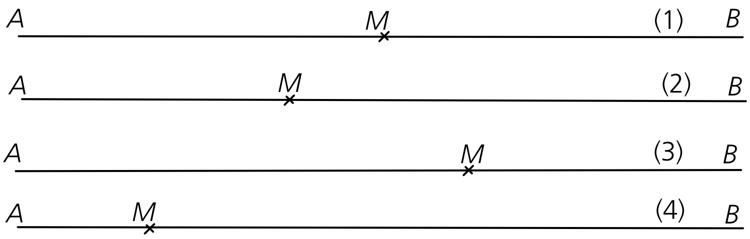
Le point M partage le segment AB en extrême et moyenne raison, si les longueurs des segments AM, MB et AB sont telles que

$$\frac{MB}{MA} = \frac{AB}{MB}, \text{ ou bien } \frac{MA}{MB} = \frac{AB}{MA}.$$

C'est la valeur commune de ce rapport qui est le nombre d'or, qu'on notera ϕ.

On dit aussi que les points A, M, B constituent une *section dorée*.

Parmi les segments ci-dessous, lesquels sont partagés en extrême et moyenne raison ?



Votre réponse

(1)

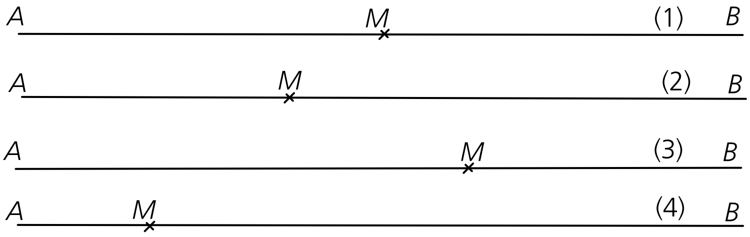
(2)

(3)

(4)

Solution

On mesure la longueur des différents segments et on trouve les résultats suivants.



Cas (1) : $MA = MB$; $\dfrac{MB}{MA} = 1$; $\dfrac{AB}{MB} = 2$. On a $\dfrac{MB}{MA} \neq \dfrac{AB}{MB}$ et $\dfrac{MA}{MB} \neq \dfrac{AB}{MA}$.

Les points A, M, B ne constituent pas une section dorée.

Cas (2) :

On a $MA = 3{,}6\ cm$; $MB = 6\ cm$; $AB = 9{,}6\ cm$; $\dfrac{MB}{MA} = 1{,}6$; $\dfrac{AB}{MB} = 1{,}6$.

On a alors $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{AB}{MB}$. *Les points A, M, B constituent une section dorée.*

Cas (3) :

On a $MA = 6\ cm$; $MB = 3{,}6\ cm$; $AB = 9{,}6\ cm$; $\dfrac{MA}{MB} = 1{,}6$; $\dfrac{AB}{MA} = 1{,}6$.

On a alors $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AB}{MA}$. *Les points A, M, B constituent une section dorée.*

Cas (4) :

$MA = 1{,}8\ cm$; $MB = 7{,}8\ cm$; $AB = 9{,}6\ cm$; $\dfrac{MB}{MA} = 4{,}4$; $\dfrac{AB}{MB} = 1{,}2$.

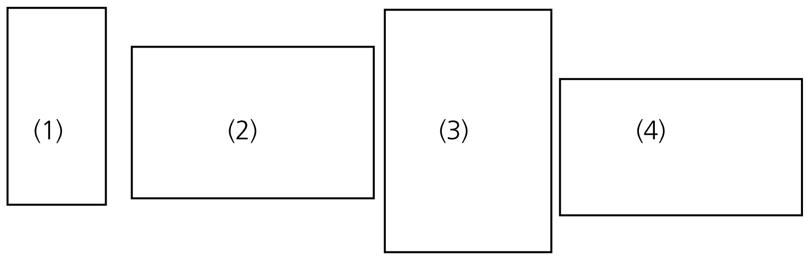
Les points A, M, B ne constituent pas une section dorée.

2. Le rectangle d'or

À partir du partage d'un segment en section dorée *A*, *M*, *B*, on peut construire un rectangle d'or. C'est le rectangle de côtés *AM* et *MB* tels que

$$\frac{MB}{MA} = \frac{AB}{MB} = \frac{MA + MB}{MB}.$$

Les artistes ont souvent considéré qu'un tel rectangle avait ces proportions particulièrement harmonieuses... à vous de voir : parmi les rectangles suivants, lequel vous paraît le plus harmonieux ?
Quel est le rectangle d'or ?



Votre réponse

(1)

(2)

(3)

(4)

Solution

On mesure les longueurs des côtés des rectangles. Soit MB le grand côté et MA le petit côté des rectangles. On a la situation suivante.

Cas (1) : MB = 2,6 cm ; MA = 1,3 cm ; AB = 3,9 cm.

On a $\frac{MB}{MA} = 2{,}0$; $\frac{AB}{MB} = 1{,}5$.

On n'a pas un rectangle d'or.

Cas (2) : MB = 3,2 cm ; MA = 2,0 cm ; AB = 5,2 cm.

On a $MA = 2{,}0$ cm ; $MB = 3{,}2$ cm ; $AB = 5{,}2$ cm ; $\frac{MB}{MA} = 1{,}6$; $\frac{AB}{MB} = 1{,}6$.

On a un rectangle d'or.

Cas (3) : MB = 3,2 cm ; MA = 2,2 cm ; AB = 5,4 cm.

On a $\frac{MB}{MA} = 1{,}4$; $\frac{AB}{MB} = 1{,}7$.

On n'a pas un rectangle d'or.

Cas (4) : MB = 3,2 cm ; MA = 1,8 cm ; AB = 5,0 cm.

On a $\frac{MB}{MA} = 1{,}7$; $\frac{AB}{MB} = 1{,}6$.

On n'a pas un rectangle d'or.

3. La valeur du nombre d'or

On appelle ϕ le nombre d'or.
Nous allons calculer sa valeur à partir de sa définition.

En partant de la définition du nombre d'or $\frac{MB}{MA} = \frac{AB}{MB} = \frac{MA + MB}{MB} = \phi$, réécrivez cette relation pour en déduire une équation du deuxième degré en ϕ.
Résolvez cette équation pour déterminer la valeur du nombre d'or.

Votre réponse

Solution

On réécrit la relation $\frac{MB}{MA}=\frac{AB}{MB}=\frac{MA+MB}{MB}=\phi$.

On a

$$\phi=\frac{MB}{MA}=\frac{MA+MB}{MB}=\frac{MA}{MB}+1=\frac{1}{\phi}+1$$
$$\phi-\frac{1}{\phi}-1=0$$
$$\phi^2-\phi-1=0$$

Les solutions de cette équation sont

$$\phi=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Le nombre d'or est la solution positive, $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La valeur de cette expression est voisine de 1,618.

4. Une recette de fabrication

Pour fabriquer le nombre d'or, décrivons une recette qui sera justifiée plus tard.

« Fabriquons une première liste de la façon suivante. Écrivons le nombre 1, puis encore le nombre 1, puis le nombre obtenu en ajoutant les deux nombres précédents (c'est-à-dire 1 + 1 = 2), puis à chaque fois écrivons le nombre obtenu en ajoutant les deux nombres précédents.
Fabriquons une deuxième liste en faisant le rapport de deux nombres consécutifs de la liste précédente, le plus grand nombre au numérateur, le plus petit au dénominateur. On obtient une succession de fractions.
On voit apparaître le nombre d'or très rapidement. »

Appliquez cette recette. Où le nombre d'or apparaît-il ?

Votre réponse

Solution

On écrit la première liste.
1 ; 1 ; 2 ; 2 + 1 = 3 ; 3 + 2 = 5 ; 5 + 3 = 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 *et ainsi de suite.*
On forme la deuxième liste.
$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{13}{8}; \frac{21}{13}; \frac{34}{21}; \frac{55}{34}; \frac{89}{55}; \frac{144}{89} \ldots$
On calcule les fractions précédentes.
$\frac{1}{1}=1; \frac{2}{1}=2; \frac{3}{2}=1{,}50; \frac{5}{3}=1{,}66; \frac{8}{5}=1{,}60; \frac{13}{8}=1{,}625;$
$\frac{21}{13}=1{,}615; \frac{34}{21}=1{,}619; \frac{55}{34}=1{,}6176; \frac{89}{55}=1{,}6182; \frac{144}{89}=1{,}61798 \ldots$

On calcule un peu plus précisément la valeur du nombre d'or :
$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$
On constate que chacune des fractions précédentes est une approximation décimale du nombre d'or. Plus on avance dans la liste, meilleure est l'approximation.
On constate aussi qu'on a un encadrement du nombre d'or, puisque chaque terme est alternativement plus petit, puis plus grand que le nombre d'or. On a
$1<\phi ; 2>\phi ; \frac{3}{2}=1{,}50<\phi ; \frac{5}{3}=1{,}66>\phi ; \frac{8}{5}=1{,}60<\phi ; \frac{13}{8}=1{,}625>\phi;$
$\frac{21}{13}=1{,}615<\phi ; \frac{34}{21}=1{,}619>\phi ; \frac{55}{34}=1{,}6176<\phi ;$
$\frac{89}{55}=1{,}6182>\phi; \frac{144}{89}=1{,}61798<\phi \ldots$

Plus on avance dans la liste, plus l'encadrement est précis. On a :
$\phi = 1{,}61803$
$1<1{,}50<1{,}60<1{,}615<1{,}6176<1{,}61798<\phi<1{,}6182<1{,}619<1{,}625<1{,}66<2.$
On constate enfin qu'une valeur assez voisine du nombre d'or est atteinte très vite. C'est une bonne recette de fabrication !