1 Calculs numériques

NOTIONS D'ENSEMBLES

- On appelle $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels : $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- On appelle $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs : $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- On appelle $\mathbb{D}$, l'ensemble des nombres décimaux. Ce sont tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où a est un entier relatif et n un entier naturel. On peut remarquer que le dénominateur de cette fraction, une fois celle-ci simplifiée, ne comporte que des puissances de 2 et de 5.
- On appelle $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a est un entier relatif et b un entier relatif non nul.
- On appelle $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels. Il s'agit de tous les nombres déjà présentés, auxquels on ajoute les nombres : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \pi, \ldots$

On peut signaler les notations $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ qui désignent les ensembles précédents privés du nombre 0.
Il est utile de constater que tout entier naturel est aussi un entier relatif ou un décimal ou un rationnel ou un réel… qu'un rationnel est aussi un réel, c'est-à-dire : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

RAPPELS DE FORMULES

Quotients

On considère les nombres réels a, b, c et d :

Si $b \neq 0$, $\quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Si b et d sont non nuls, $\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Si $c \neq 0$, $\quad a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$

Si b, c et d sont non nuls, $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Si b et c sont non nuls, $$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

Lorsque b et d sont deux réels non nuls :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } ad = bc$$

Radicaux

Les nombres réels a et b sont **positifs** :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Si $b \neq 0$, $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Si $n \in \mathbb{N}$, $$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$$

Puissances

Les nombres a et b sont des réels, les nombres m et n sont des entiers naturels :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$$

Si $a \neq 0$, $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Si $b \neq 0$, $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Si $a \neq 0$ $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exercice 1 — 10 min

L'exercice consiste à reconnaître les ensembles auxquels appartiennent les nombres indiqués dans la première colonne. Pour chaque nombre, on propose 5 réponses. Pour chacune d'elles, l'élève doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante.

$\frac{462}{385}$	entier naturel	☐ Faux ☐ Vrai
	entier relatif	☐ Faux ☐ Vrai
	décimal	☐ Faux ☐ Vrai
	rationnel	☐ Faux ☐ Vrai
	réel	☐ Faux ☐ Vrai
$\sqrt{147} - 7\sqrt{3}$	entier naturel	☐ Faux ☐ Vrai
	entier relatif	☐ Faux ☐ Vrai
	décimal	☐ Faux ☐ Vrai
	rationnel	☐ Faux ☐ Vrai
	réel	☐ Faux ☐ Vrai
$\frac{144}{14}$	entier naturel	☐ Faux ☐ Vrai
	entier relatif	☐ Faux ☐ Vrai
	décimal	☐ Faux ☐ Vrai
	rationnel	☐ Faux ☐ Vrai
	réel	☐ Faux ☐ Vrai
$\sqrt{98} - 3\sqrt{2}$	entier naturel	☐ Faux ☐ Vrai
	entier relatif	☐ Faux ☐ Vrai
	décimal	☐ Faux ☐ Vrai
	rationnel	☐ Faux ☐ Vrai
	réel	☐ Faux ☐ Vrai

Exercice 2 — 40 min

Après avoir simplifié chacune des fractions, si c'est possible, calculer :

$A = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{3}{4}$; $B = \frac{24}{33} - \frac{3}{22} + \frac{25}{55}$; $C = \frac{15}{45} \times \frac{39}{26} \times \frac{14}{35}$;

$$D = \left(2 - \frac{2}{7}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \;;\; E = \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{19} \times \frac{2 + \frac{1}{7}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} \;;$$

$$F = \frac{\frac{1}{2} - 2 + \frac{2}{3}}{1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}} \;;\; G = \frac{2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{5}{2} - \frac{2}{3}} : \frac{55}{34}.$$

✷✷ Exercice 3 — 30 min

1. Simplifier les écritures suivantes :

$A = \sqrt{3200} - 7\sqrt{200} + 3\sqrt{72}$; $B = 6\sqrt{56} - \frac{3}{2}\sqrt{126} + \frac{1}{2}\sqrt{1400}$;

$C = \sqrt{96} \times \sqrt{384}$; $D = \sqrt{\frac{5}{4}} \times \sqrt{\frac{64}{125}}$; $E = \left(\sqrt{6} + 2\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$;

$F = 2\left(\sqrt{3} - 3\right)^2$; $G = \left(\sqrt{7} - \sqrt{11}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{11}\right)$;

$H = \left[5\left(\sqrt{8} - \sqrt{18}\right)\right]^2$.

2. Écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur :

$A = \frac{10}{\sqrt{5}}$; $B = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; $C = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$; $D = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

✷✷ Exercice 4 — 20 min

1. Donner sous forme de puissances de 2 et de 3 les nombres suivants :

$A = 2^3 \times 6^2 \times 3^3$; $B = (6^2)^3 \times (4^2 \times 3)^2$; $C = \frac{56^2 \times 6^3 \times 350}{21^3 \times 40^2}$.

2. Simplifier les écritures des nombres suivants :

$D = 10^3 \times 100^{-2} \times 10^4$; $E = 0{,}03 \times 10^4 \times 10^{-3}$;

$F = \frac{10^{-2} + 5 \times 10^{-1} - 21 \times 10^{-2}}{30 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-1}}$.

✷ Exercice 5 — 5 min

Traduire par un algorithme la proposition :

« le nombre entré dans la calculatrice est-il supérieur à 7 »

✷ Exercice 6 — 15 min

Indiquer, dans chacun des cas suivants, quelle est la lettre correspondant à la bonne réponse. On justifiera cette réponse.

1. Le développement de l'expression $x^2 - 4(3 - x)^2$ est :

A : $5x^2 - 24x + 36$; B : $-3x^2 + 24x - 36$; C : $5x^2 - 36$.

2. Une forme factorisée de $x^2 - 4(3 - x)^2$ est :

A : $(-x + 6)(3x - 6)$; B : $(-3x + 12)(5x - 12)$; C : $(-x + 6)(-x - 6)$.

3. Le développement de l'expression $2x(3 - x) - (x - 3)^2$ est :

A : $-3x^2 + 9$; B : $-x^2 + 6x - 9$; C : $-3x^2 + 12x - 9$

4. Une forme factorisée de l'expression $2x(3 - x) - (x - 3)^2$ est :

A : $3(3 - x)(x - 1)$; B : $(3 - x)(x + 3)$; C : $(3 - x)(x - 3)$.

✷✷ Exercice 7 — 30 min

Factoriser les expressions suivantes :

$A(x) = 5x^2 - 125$;
$B(x) = x^2 - 36 + (4x - 24)$;
$C(x) = 4x^2 - 12x + 9$;
$D(x) = 16x^2 + 56x + 49$;
$E(x) = 16(3x - 2)^2 - 4$;
$F(x) = 4(x + 2)^2 - (x - 3)^2$;
$G(x) = 16(2x + 1)^3 - (2x + 1)(x - 3)^2$;
$H(x) = (4x^2 - 1)^2 - 25(2x + 1)^2$.

✷✷ Exercice 8 — 20 min

Un commerçant effectue, pour les soldes, une remise de 12 % sur tous ses articles en magasin.

1. Un article coûtait 130 euros avant les soldes, quel est son prix pendant les soldes ? Cet article n'étant toujours pas vendu, le commerçant fait une remise de 10 % sur le prix soldé. Quel est le pourcentage de la remise totale effectuée sur cet article ?

2.

a) Pierre achète, pendant les soldes, un article qu'il paie 74,8 euros. Combien cet article coûtait-il avant les soldes ?

b) Les soldes terminées, quel pourcentage d'augmentation le commerçant devrait-il appliquer à cet article pour qu'il retrouve son prix de départ.

Contrôle

1h30

1. Reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres suivants :

$A = 13$; $B = -\dfrac{23}{25}$; $C = \dfrac{25}{3}$; $D = \dfrac{78}{65}$; $E = 34$; $F = -\sqrt{9}$; $G = -2 + \sqrt{5}$.

2. Calculer :

$$A = \dfrac{\dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{2} - 3}{1 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{4}} \; ; \; B = \dfrac{75^3 \times 24^2 \times 7^3}{15^4 \times 14^2 \times 25^3} \; ; \; C = \left(-\dfrac{2}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 \times (12)^2$$

$$D = 10^{-3} \times 1000^2 \times 10^{-3} \; ; \; E = \dfrac{200^2 \times 10^3 \times 50^{-2}}{40^2 \times 10^{-3}} \; ;$$

$$F = \sqrt{864} + \sqrt{150} + \sqrt{216} .$$

3.

a) Factoriser les expressions suivantes :
$A(x) = 3x^4 - 48x^2$;
$B(x) = x^2 - 4 + 7(x + 2)(x - 1)$;
$C(x) = (x^2 - 2x + 1) - 4(2x + 3)^2$;
$D(x) = (5 - 2x)^2 - 9(x^2 - 10x + 25)$.

b) Calculer la valeur de $A(x)$ pour $x = \sqrt{3}$.

c) Calculer la valeur de $B(x)$ pour $x = -\sqrt{2}$.

d) À quels ensembles appartiennent $A\left(\sqrt{3}\right)$ et $B\left(-\sqrt{2}\right)$?

Corrigés des exercices

Exercice 1

La fraction donnée est simplifiable, on décompose numérateur et dénominateur en produits de facteurs premiers puisque 462 est divisible par 2 et 3 et 385 est divisible par 5, ce qui donne :

$$\dfrac{462}{385} = \dfrac{2 \times 3 \times 7 \times 11}{5 \times 7 \times 11} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2.$$

Ce nombre est un décimal donc aussi un rationnel et un réel.

$\sqrt{147} - 7\sqrt{3} = \sqrt{3 \times 49} - 7\sqrt{3} = 7\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 0$. Le résultat est un entier naturel donc aussi un relatif, un décimal, un rationnel et un réel.

$\dfrac{144}{14} = \dfrac{72}{7}$. Cette fraction ne peut plus se simplifier et son dénominateur ne se compose pas de puissances de 2 et 5. Ce nombre n'est pas décimal, c'est un rationnel d'ou également un réel.

$\sqrt{98} - 3\sqrt{2} = \sqrt{49 \times 2} - 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Il s'agit uniquement d'un nombre réel.

$\dfrac{462}{385}$	entier naturel	☒ Faux ☐ Vrai
	entier relatif	☒ Faux ☐ Vrai
	décimal	☐ Faux ☒ Vrai
	rationnel	☐ Faux ☒ Vrai
	réel	☐ Faux ☒ Vrai
$\sqrt{147} - 7\sqrt{3}$	entier naturel	☐ Faux ☒ Vrai
	entier relatif	☐ Faux ☒ Vrai
	décimal	☐ Faux ☒ Vrai
	rationnel	☐ Faux ☒ Vrai
	réel	☐ Faux ☒ Vrai
$\dfrac{144}{14}$	entier naturel	☒ Faux ☐ Vrai
	entier relatif	☒ Faux ☐ Vrai
	décimal	☒ Faux ☐ Vrai
	rationnel	☐ Faux ☒ Vrai
	réel	☐ Faux ☒ Vrai
$\sqrt{98} - 3\sqrt{2}$	entier naturel	☒ Faux ☐ Vrai
	entier relatif	☒ Faux ☐ Vrai
	décimal	☒ Faux ☐ Vrai
	rationnel	☒ Faux ☐ Vrai
	réel	☐ Faux ☒ Vrai

Exercice 2

- On réduit A au même dénominateur $3 \times 4 \times 5 = 60$:

$$A = \frac{1 \times 4 \times 5}{60} - \frac{2 \times 3 \times 4}{60} + \frac{3 \times 3 \times 5}{60} = \frac{20}{60} - \frac{24}{60} + \frac{45}{60}.$$

$$A = \frac{20 - 24 + 45}{60}$$

$$\boxed{A = \frac{41}{60}}$$

- On simplifie la première et la dernière des fractions qui composent B :

$\frac{24}{33} = \frac{8 \times 3}{3 \times 11} = \frac{8}{11}$, $\frac{25}{55} = \frac{5 \times 5}{5 \times 11} = \frac{5}{11}$, on en déduit :

$$B = \frac{8}{11} - \frac{3}{22} + \frac{5}{11} = \frac{16 - 3 + 10}{22}$$

$$\boxed{B = \frac{23}{22}}$$

- On commence par simplifier C en décomposant les nombres en produit de facteurs premiers :

$$C = \left(\frac{3 \times 5}{3^2 \times 5}\right) \times \left(\frac{3 \times 13}{2 \times 13}\right) \times \left(\frac{2 \times 7}{5 \times 7}\right)$$

$$C = \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2 \times 3}{2 \times 3 \times 5} = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{C = \frac{1}{5}}$$

- On effectue les calculs dans chaque parenthèse, puis on fait le produit, en simplifiant :

$$D = \left(\frac{14 - 2}{7}\right) \times \left(\frac{9 - 8}{12}\right) = \frac{12}{7} \times \left(\frac{1}{12}\right) = \frac{12}{7 \times 12}$$

$$\boxed{D = \frac{1}{7}}$$

- $$E = \left(\frac{9 + 10}{15}\right) \times \frac{1}{19} \times \frac{\frac{14 + 1}{7}}{\frac{4 - 3}{6}} = \frac{19}{15} \times \frac{1}{19} \times \frac{\frac{15}{7}}{\frac{1}{6}} = \frac{19}{15} \times \frac{1}{19} \times \frac{15}{7} \times \frac{6}{1}$$

On simplifie par 19 et 15 :

$$\boxed{E = \frac{6}{7}}$$