Chapitre 1
QUELQUES RAPPELS DE PREMIÈRE

Exercice 1.1 ☺

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1) $2x^2+3x-5=0$ 2) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$ 3) $-5x^2+2x-1=0$

Exercice 1.2 ☺

Factoriser les trinômes suivants, s'ils sont factorisables :
1) $f(x)=-3x^2+7x-2$ 2) $g(x)=-2x^2+x(2\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{6}$
3) $h(x)=\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}$ 4) $i(x)=-5x^2+x-1$

Exercice 1.3 ☺

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
1) $-4x^2+12x-9\geq 0$ 2) $-3x^2+5x-2\leq 0$ 3) $-2x^2+x+1>0$

Exercice 1.4 😐

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations irrationnelles suivantes :
1) $\sqrt{4x^2+5}=2x+3$ 2) $\sqrt{x-5}+\sqrt{x-3}=4$
3) $\sqrt{7-x}\leq x-1$ 4) $2x-1<\sqrt{x^2-3x+2}$

Exercice 1.5 😐

Considérons l'équation (E) : $\cos^2 x+4\sqrt{3}\cos x-11=0$ et l'équation (E') associée :
(E') $X^2+4\sqrt{3}X-11=0$. Posons $f(X)=X^2+4\sqrt{3}X-11$.
1) Vérifier que $f(1)$ et $f(-1)$ sont strictement négatifs.
2) Pourquoi peut-on en déduire que l'équation (E') a deux racines et que 1 et -1 sont compris entre ces deux racines ?
3) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution.

Exercice 1.6 ☺

Etudier la fonction f définie par les expressions suivantes et construire sa courbe représentative C_f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) $f(x)=x^3+3x-2$
2) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+2$
3) $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x-3}$
4) $f(x)=\dfrac{x^2-8x+4}{x^2-5x+4}$
5) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2-3x+3}$
6) $f(x)=-x+5-\dfrac{4}{x}$
7) $f(x)=\dfrac{x^2-5x-2}{2(x+1)}$
8) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$

Exercice 1.7 ☺

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto \frac{4x+b}{2x^2+bx+c}$$ où b et c sont deux réels.

1) Déterminer b et c pour que f admette des extremums pour $x = -2$ et $x = 1$.
2) Etudier la fonction obtenue pour $b = 2$ et $c = 5$.
   Construire la courbe représentative C de f dans le plan rapporté au repère Orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 1.8 😐

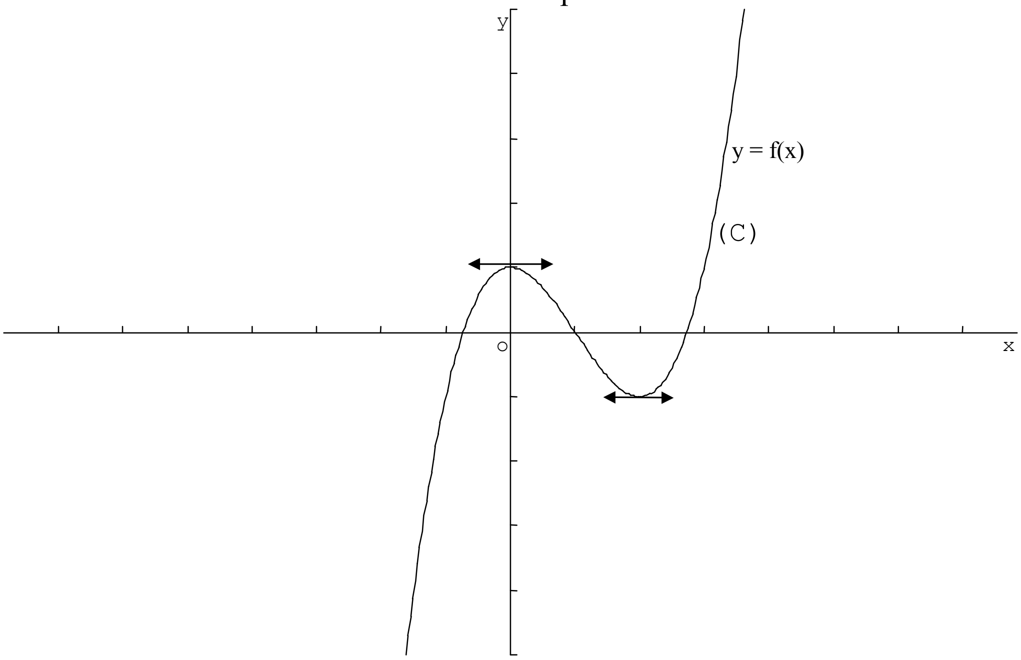
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto \frac{-2x^2-x-7}{x+1}$$

1) Déterminer les trois réels a, b, c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.
2) Etudier la fonction f et construire sa courbe représentative C dans le plan
3) rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
4) En quels points de C, la tangente a-t-elle pour coefficient directeur $\dfrac{14}{9}$?
5) Notons D_b la droite d'équation : $y=\dfrac{14}{9}x+b$.
   Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel b, le nombre de points D'intersection de C et D_b.

Exercice 1.9 ☺

On considère la fonction f dont la courbe représentative est la suivante :



Construire les courbes représentatives C_g et C_h des fonctions :
$g : x \mapsto -f(x) - 1$ et $h : x \mapsto f(2+x)$

Exercice 1.10 ☺

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + c}{x}$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Déterminer les réels a, b, c pour que la droite D d'équation : $y = \dfrac{x}{2} + 1$
soit asymptote à C et que la tangente T au point A de (C) d'abscisse 2 soit parallèle a l'axe x'x.
2) Soit $g : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x}$
Etudier g et construire sa courbe représentative C'.
Vérifier que C' admet un centre de symétrie I.
3) On considère l'équation (E) : $x^2 + 2(1-m)x + 4 = 0$
Discuter, suivant les valeurs du réel m, l'existence et le signe des racines de (E).

Exercice 1.11 ☺

On sait que f(x) est de la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$; a, b et c étant des réels.

On donne le tableau de variations de la fonction f et on note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Calculer f '(x).
2) Déterminer les réels a, b, c.
3) Déterminer l'asymptote oblique D à la courbe C.
4) Etudier la position de C par rapport à D.
5) Construire C.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

PROLONGEMENT

Exercice 1.12 😐

Soit (E) l'équation suivante d'inconnue x : $mx^2 - (m-2)(m^2+1)x + m(m-2)^2 = 0$

$m \in \mathbb{R}$.

1) Pour quelle valeur de m, (E) est-elle du premier degré ? La résoudre alors.
2) Résoudre (E) lorsque m = 1.
3) On suppose désormais $m \neq 0$.

a) Calculer le discriminant Δ de (E).
b) Montrer que Δ est positif ou nul quel que soit $m \in \mathbb{R}^*$.
c) Calculer les racines x' et x" de (E).
   (On note x" celle qui est de la forme $am^2 + bm$.)
d) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation x' = x".
e) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'inéquation x' > x".
f) Montrer que, quel que soit $m \in \mathbb{R}^*$: –2 < x".
g) Pour quelles valeurs de m a-t-on x'< –2 < x" ?

Exercice 1.13 😐

1) Déterminer un polynôme P de degré 4 tel que : P(0) = 24 ; P(1) = –30 ; P(–1) = 36 ; P(2) = –72 et le coefficient du terme de plus haut degré est 2.
2) a) Vérifier que P(–2) = 0 et P(3) = 0.
   b) En déduire la résolution de l'équation (E) P(x) = 0.

Qcm

1) Soit P(x) le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^2 - 3x - 5$.

a	b	c	d
Le discriminant de P est –31	si $x \in [1\ ;\ 2]$ $P(x) < 0$	Si $x \in]-\infty\ ;\ -1]$ $P(x) > 0$	Si $x \in]-\infty\ ;\ -1[$ $P(x) > 0$

2) La parabole d'équation $y = P(x)$ a pour sommet le point de coordonnées :

a	b	c	d
$\left(\frac{3}{2};-5\right)$	$\left(\frac{3}{4};-5\right)$	$\left(\frac{3}{2};\frac{49}{8}\right)$	$\left(\frac{3}{4};-\frac{49}{8}\right)$

SOLUTIONS RÉDIGÉES

Corrigé 1.1

1) $2x^2+3x-5=0$. On calcule $\Delta=3^2-4(2)(-5)=9+40=49$; l'équation a racines :

$$x'=\frac{-3-7}{4}=-\frac{5}{2} \qquad x''=\frac{-3+7}{4}=1 \qquad S=\left\{-\frac{5}{2};1\right\}$$

On aurait pu noter que 1 était racine et l'autre est $-\frac{5}{2}$ $\left(\frac{c}{a}\right)$.

2) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$

$$\Delta=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-4\sqrt{6}=2+2\sqrt{6}+3-4\sqrt{6}=(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$$

$$x'=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2} \quad x''=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \qquad S=\left\{\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}.$$

3) $-5x^2+2x-1=0$

$\Delta=4-4(-5)(-1)=-16<0$. Cette équation n'a pas de racine réelle. $S=\varnothing$.

Corrigé 1.2

1) $f(x)=-3x^2+7x-2 \quad \Delta=49-4(-3)(-2)=25$. Le trinôme a deux racines

$$x'=\frac{-7-5}{-6}=2 \text{ et } x''=\frac{-7+5}{-6}=\frac{1}{3}$$

$$f(x)=-3(x-\frac{1}{3})(x-2)=(-3x+1)(x-2)$$

2) $g(x)=-2x^2+x(2\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{6}$

$$\Delta=(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-4(-2)(-\sqrt{6})=8+3+4\sqrt{6}-8\sqrt{6}=8-4\sqrt{6}+3=(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$$

$$x'=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-4}=-\sqrt{2} \text{ et } x''=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g(x)=-2(x+\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\sqrt{2})=(-2x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})$$

3) $h(x)=\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}$

$$\Delta=(-\frac{2}{3})^2-4(\frac{4}{3})(\frac{1}{12})=\frac{4}{9}-\frac{16}{36}=0$$

Le trinôme a une racine double $x_0 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{4} \quad (-\frac{b}{2a})$ $\qquad h(x) = \frac{4}{3}(x - \frac{1}{4})^2$

4) $i(x) = -5x^2 + x - 1 \qquad \Delta = 1 - 4(-5)(-1) = -19.$
Ce trinôme i(x) n'est donc pas factorisable.

Corrigé 1.3

1) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0 \quad (I)$

$(I) \Leftrightarrow -(4x^2 - 12x + 9) \geq 0 \Leftrightarrow -(2x-3)^2 \geq 0$

La seule solution de cette inéquation est donc $\frac{3}{2}$. $\qquad S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

2) $-3x^2 + 5x - 2 \leq 0$

x' = 1 est racine du trinôme. L'autre est $\frac{2}{3}$ (car leur produit vaut $\frac{c}{a}$).

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$-3x^2 + 5x - 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [1; +\infty[$

3) $-2x^2 + x - 1 > 0$
Le trinôme est donc, pour tout réel x, de signe négatif. (Signe de –2)
Donc l'inéquation n'a pas de solution.

Corrigé 1.4

1) $\sqrt{4x^2 + 5} = 2x + 3 \text{ (e)}$

L'ensemble de définition de l'équation (e) est $D = \left\{x \in \mathbb{R} / 4x^2 + 5 \geq 0\right\} = \mathbb{R}$

$$(e) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 5 = (2x+3)^2 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 4x^2 + 5 = 4x^2 + 12x + 9 \quad (e') \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$(e') \Leftrightarrow 12x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \quad ; \text{ or } \ -\frac{1}{3} \geq -\frac{3}{2} \quad \text{donc} \quad S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

2) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x-3} = 4 \text{ (e)}$

$D=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-5\geq 0 \text{ et } x-3\geq 0\}=[5;+\infty[$

$(e)\Leftrightarrow x-5+x-3+2\sqrt{(x-5)(x-3)}=16\Leftrightarrow\sqrt{(x-5)(x-3)}=12-x$

$(e)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)(x-3)=(12-x)^2 \ (e')\\ 12-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)(x-3)=144-24x+x^2 \ (e')\\ x\leq 12\end{cases}$

$(e')\Leftrightarrow x^2-8x+15=144-24x+x^2\Leftrightarrow 16x=129\Leftrightarrow x=\dfrac{129}{16}$

or $\dfrac{129}{16}\leq 12$ donc $S=\left\{\dfrac{129}{16}\right\}$

3) $\sqrt{7-x}\leq x-1\,(I)$ $\quad D=\,]-\infty;7]$

- si $x<1$ alors $x-1<0$ et l'inéquation n'a pas de solution (puisque $\sqrt{x-7}\geq 0$) $S_1=\varnothing$
- si $x\geq 1$ alors

  $(I)\Leftrightarrow(\sqrt{7-x})^2\leq(x-1)^2\Leftrightarrow 7-x\leq x^2-2x+1\Leftrightarrow x^2-x-6\geq 0$

  $\Delta=25\quad x'=-2\quad x''=3$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		+	0	–	0	+	

$S_2=(]-\infty;-2]\cup[3;+\infty[)\cap[1;+\infty[=[3;+\infty[$

L'ensemble des solutions de (I) est donc $S=S_1\cup S_2=[3;+\infty[$

4) $2x-1<\sqrt{x^2-3x+2}\,(I)$

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	–	0	+	

$D=\,]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$

- si $x<\dfrac{1}{2}$ alors $2x-1<0$; tout réel $x<\dfrac{1}{2}$ est donc solution de (I) puisque $\sqrt{x^2-3x+2}>2x-1$ (ce nombre étant négatif) $S_1=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cap D=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$
- si $x\geq\dfrac{1}{2}$ alors $2x-1\geq 0$.

$(I)\Leftrightarrow(2x-1)^2<x^2-3x+2\Leftrightarrow 4x^2-4x+1<x^2-3x+2\Leftrightarrow 3x^2-x-1<0$

$\Delta=1-4(3)(-1)=13\quad x'=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}<\dfrac{1}{2}\quad x''=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}>\dfrac{1}{2}$