CHAPITRE 1

MÉCANISMES

1.1 Modélisation cinématique

1.1.1 Problématique

Il est souvent nécessaire d'établir un modèle permettant d'étudier aussi bien les mouvements du mécanisme que les efforts qu'il doit supporter. En effet le système réel, soit parce qu'il n'existe pas encore (en phase de conception) soit parce qu'il est trop complexe n'est en général pas adapté à l'étude. La modélisation va intervenir aussi bien au niveau de la conception d'un mécanisme que dans l'analyse à posteriori d'un mécanisme existant.

- Dans le premier cas on se pose alors la question suivante : Comment transmettre une puissance, obtenir une trajectoire particulière, résister à des efforts,...? La réponse consiste à définir un ensemble de liaisons élémentaires associées pour obtenir le résultat souhaité. Après cette étape il reste à concevoir à partir de ce modèle les pièces qui composent le mécanisme.
- Dans le second cas, le mécanisme étant donné, on se propose alors de le modéliser par un schéma qui va en permettre une analyse plus simple. À partir de cette modélisation on pourra en étudier le comportement tant au niveau des mouvements (trajectoire, vitesse , accélération) qu'au niveau des efforts transmis et ceux que doivent encaisser les liaisons.

1.1.2 Modèle cinématique

Un solide dans un mécanisme est lié aux solides voisins et les mouvements relatifs sont limités par la nature des surfaces en contact. À partir de ces surfaces en contact et des mouvements relatifs on choisit alors de modéliser le contact par une (ou plusieurs) liaison(s) cinématique(s). Le torseur cinématique est le principal outil de cette caractérisation :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{matrix} \right\}_{\substack{A \\ (\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})}} . \tag{1.1}$$

Ce torseur caractérise les 6 mouvements élémentaires possibles (3 rotations, 3 translations) entre deux solides.

Le principal problème que l'on rencontre lors de cette phase est la différence entre la réalité et le modèle. En effet, les défauts de réalisation des surfaces (rugosité, défaut de forme, tolérance), la présence nécessaire de jeu, la déformation des pièces, l'usure, ..., rendent cette modélisation difficile et souvent dépendante du point de vue.

On appelle modèle cinématique d'un mécanisme, le modèle construit autour des hypothèses suivantes :

- des pièces indéformables,
- des liaisons sans jeu,
- des surfaces de contact géométriquement parfaites,
- des surfaces de contact simples (plan, sphère, cylindre, hélicoïde).

À partir de ces hypothèses, on modélise la liaison entre les deux solides par une liaison normalisée. Ces liaisons élémentaires permettent de caractériser les mouvements simples entre les pièces (rotations, translations, combinées ou non).

1.2 Liaisons normalisées

1.2.1 Paramétrage des liaisons

La liaison entre les deux solides est caractérisée par le torseur cinématique du mouvement relatif entre les deux solides. Les coordonnées de ce torseur cinématique sont les paramètres de la liaison.

1.2.2 Tableau des liaisons

Les tableaux en annexe (page 325) présentent les liaisons normalisées. La norme applicable est la norme NF EN ISO 3952-1.

Pour chaque liaison on retrouve

- la désignation normalisée, le torseur cinématique associé, le torseur des efforts transmissibles ;
- une représentation géométrique de la liaison ;
- le symbole ISO en perspective et les deux vues planes ;
- les torseurs sont écrits sous la forme la plus générale possible.

1.3 Chaînes de solides

1.3.1 Structure des mécanismes - graphe de structure

Un mécanisme est constitué de solides reliés par des liaisons cinématiques. L'ensemble de ces liaisons et des solides forme une chaîne de solides.

Cette chaîne peut-être représentée par un graphe dit graphe de structure (ou graphe des liaisons). Sur ce graphe, les solides sont les nœuds et les liaisons les arcs. Il est d'usage de préciser le solide référentiel.

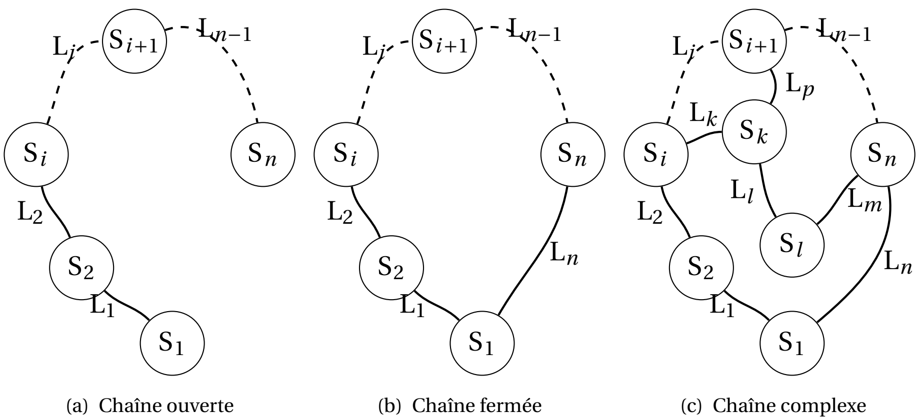


FIGURE 1.1 – Chaînes de solides

a) Classe d'équivalence cinématique

On appelle classe d'équivalence cinématique, un ensemble de solides n'ayant aucun mouvement relatif. Cet ensemble de solides est considéré comme un seul solide dans les études qui suivent. Lors de l'étude d'un mécanisme, on commence par définir les classes d'équivalence puis on recherche les liaisons entre ces classes d'équivalence.

b) Chaînes ouvertes

Une chaîne de solide est dite ouverte (fig 1.1(a)) lorsque la structure correspond à un ensemble de solides liés les uns aux autres sans bouclage. On retrouve cette structure dans les mécanismes de type robot, grue, manipulateur, $\cdots$

c) Chaînes fermées

Une chaîne de solide est dite fermée (fig 1.1(b)) lorsque le graphe présente une boucle.

d) Chaînes complexes

La chaîne de solides est dite complexe (fig 1.1(c)) lorsqu'elle présente plusieurs boucles imbriquées.

Nombre cyclomatique Le nombre cyclomatique γ caractérise la complexité de la chaîne, il précise le nombre minimal de boucles qu'il est nécessaire d'étudier pour définir complètement le mécanisme. Une chaîne fermée simple a un nombre cyclomatique de 1.

$$\gamma = \mathrm{L} - \mathrm{N} + 1 \tag{1.2}$$

avec L, le nombre de liaisons du mécanisme et N, le nombre de solides du mécanisme.

1.3.2 Analyses géométrique et cinématique des mécanismes

a) Étude géométrique d'un mécanisme en chaîne fermée

Pour réaliser l'étude géométrique d'un système en boucle fermée (fig 1.1(b)), il suffit d'écrire la relation vectorielle reliant les points caractéristiques de chaque solide.

Soit O_i, le point caractéristique du solide S_i, la relation de fermeture de la chaîne géométrique s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} + \overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{O}_{i-1}\mathrm{O}_i} + \cdots + \overrightarrow{\mathrm{O}_{n-1}\mathrm{O}_n} + \overrightarrow{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_1} = \vec{0}.$$

En projetant cette équation vectorielle dans une base orthonormée, on obtient 3 équations scalaires reliant les différents paramètres géométriques.

Remarque : Dans le cas d'un mécanisme plan, on obtient 2 équations scalaires, déduites de la projection de cette relation sur les axes du plan.

b) Étude cinématique d'un mécanisme en chaîne fermée

Soit, un mécanisme en chaîne fermée composé de n solides et n liaisons (fig 1.1(b)). Pour chaque liaison L_i, on peut écrire le torseur cinématique entre les deux solides S_i et S_{i+1} de la liaison au point O_i caractéristique de la liaison.

$$\left\{\mathcal{V}_{(i+1)/i}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(i+1)/i}}\\ \overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathrm{O}_i\in(i+1)/i}}\end{array}\right\}_{\mathrm{O}_i}$$

La fermeture cinématique s'obtient en écrivant la somme des torseurs en un même point :

$$\left\{\mathcal{V}_{1/2}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{2/3}\right\} + \cdots + \left\{\mathcal{V}_{(i-1)/i}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{i/(i+1)}\right\} + \cdots + \left\{\mathcal{V}_{n/1}\right\} = \{0\}$$

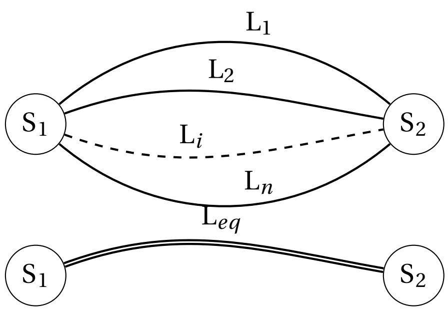
Cette relation permet d'obtenir 2 équations vectorielles, et après projection 6 équations scalaires.

Remarque : cette somme de torseur ne peut se calculer que si les torseurs sont écrits en un même point.

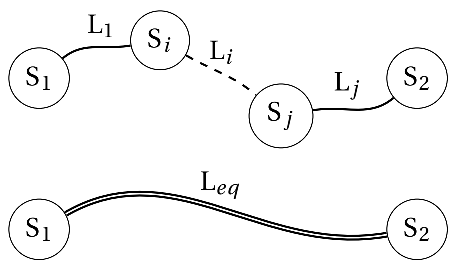
1.3.3 Liaisons cinématiquement équivalentes

On appelle liaison cinématiquement équivalente entre deux pièces, la liaison qui se substituerait à l'ensemble des liaisons réalisées entre ces pièces avec ou sans pièce intermédiaire.

La liaison équivalente doit avoir le même comportement que l'ensemble des liaisons auquel elle se substitue. On considère deux types de liaisons équivalentes : les liaisons en série et les liaisons en parallèles. Pour déterminer la liaison équivalente, on pourra soit réaliser une étude du point de vue cinématique, soit du point de vue statique.



(a) Liaisons en parallèle



(b) Liaisons en série

FIGURE 1.2 – Liaisons équivalentes

a) Liaisons en série

Des liaisons sont dites en série lorsque le graphe a la structure 1.2(b). On retrouve en fait la structure d'une chaîne ouverte.

Étude cinématique On recherche le torseur cinématique du mouvement du solide **2** par rapport au solide **1** : $\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$. En décomposant sur les solides intermédiaires, on obtient :

$$\left\{\mathcal{V}_{2/1}^{eq}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{2/j}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{j/i}\right\} + \cdots + \left\{\mathcal{V}_{i/1}\right\} \tag{1.3}$$

On constate que, le torseur cinématique de la liaison équivalente à plusieurs liaisons en série est égal à la somme des torseurs cinématiques des liaisons de la chaîne.

Remarque : chaque torseur doit être écrit au même point avant de calculer la somme.

Étude statique On suppose les solides en équilibre, on néglige le poids des pièces, les actions extérieures appliquées sur le solide S_n sont représentées par le torseur d'action mécanique $\{\mathscr{F}_{ext\to n}\}$.

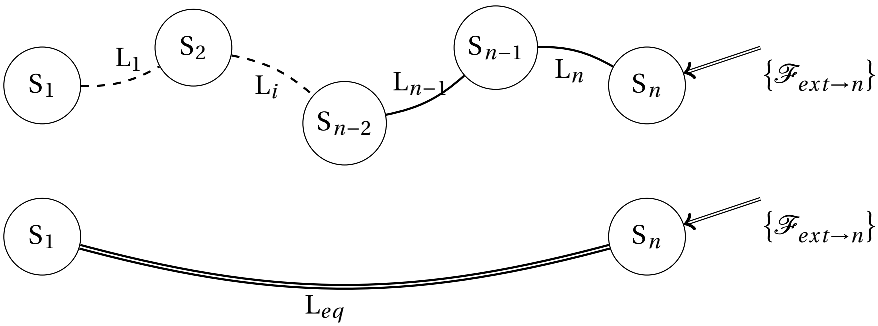


FIGURE 1.3 – Liaisons en série - Étude statique

On note

- $\left\{\mathscr{A}_{(n-1)\to n}\right\}$, le torseur des actions transmissibles par la liaison L_n entre les solides S_n et S_{n-1},
- $\left\{\mathscr{A}_{eq}\right\}$, le torseur des actions transmissibles par la liaison équivalente L_{eq} entre les solide S_1 et S_n.

La liaison équivalente doit se comporter du point de vue des efforts transmissibles comme l'ensemble des liaisons en série. Si on applique le PFS au solide S_n, on peut donc écrire dans un cas comme dans l'autre :

- pour les liaisons en série

$$\left\{\mathscr{A}_{(n-1)\to n}\right\} + \left\{\mathscr{F}_{ext\to n}\right\} = \{0\}$$

- pour la liaison équivalente

$$\left\{\mathscr{A}^{eq}_{1\to n}\right\} + \left\{\mathscr{F}_{ext\to n}\right\} = \{0\}$$

On en déduit que

$$\left\{\mathscr{A}^{eq}_{1\to n}\right\} = \left\{\mathscr{A}_{(n-1)\to n}\right\}$$

En appliquant ensuite le PFS sur le solide S_{n-1}, on déduit :

$$\left\{\mathscr{A}_{(n-1)\to n}\right\} = \left\{\mathscr{A}_{(n-2)\to (n-1}\right\}$$

Finalement en isolant successivement chacun des solides jusqu'au solide S_2, on en déduit que tous les torseurs des actions de liaisons doivent être égaux et égaux à celui de la liaison équivalente.

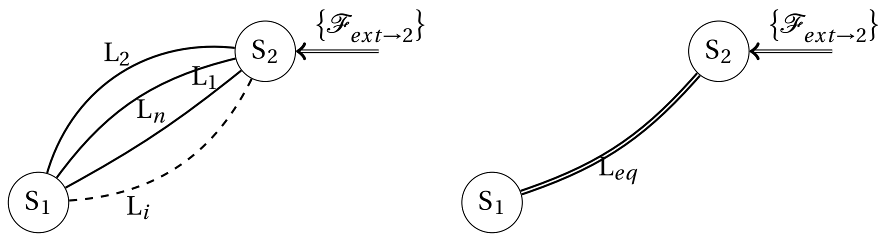


FIGURE 1.4 – Liaisons parallèles

$$\left\{\mathscr{A}^{eq}_{1\to n}\right\} = \left\{\mathscr{A}_{(n-1)\to n}\right\} = \left\{\mathscr{A}_{(n-2)\to(n-1)}\right\} = \left\{\mathscr{A}_{(n-3)\to(n-2)}\right\} = \cdots = \left\{\mathscr{A}_{1\to 2}\right\} \tag{1.4}$$

b) Liaisons en parallèle

Lorsque plusieurs liaisons relient directement deux solides, les liaisons sont dites en parallèle (fig 1.4).

Étude cinématique L'ensemble des liaisons L_i en parallèle impose le mouvement du solide **2** par rapport au solide **1**, le torseur cinématique $\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$ représente ce mouvement.

On note : $\left\{\mathcal{V}^{i}_{2/1}\right\}$, le torseur cinématique de la liaison L_i entre les deux solides S_1 et S_2.

Chaque liaison élémentaire L_i ne peut que respecter le mouvement global du solide **2** par rapport au solide **1**, on peut donc écrire :

$$\left\{\mathcal{V}^{i}_{2/1}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$$

Le comportement cinématique de la liaison équivalente L_{eq} doit aussi respecter le mouvement global du solide **2** par rapport au solide **1** :

$$\left\{\mathcal{V}^{eq}_{2/1}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$$

d'où la condition que doit respecter le torseur de la liaison équivalente :

$$\left\{\mathcal{V}^{eq}_{2/1}\right\} = \left\{\mathcal{V}^{1}_{2/1}\right\} = \left\{\mathcal{V}^{2}_{2/1}\right\} = \cdots = \left\{\mathcal{V}^{i}_{2/1}\right\} = \cdots = \left\{\mathcal{V}^{n}_{2/1}\right\} \tag{1.5}$$

Pour déterminer, à partir de l'étude cinématique, la liaison équivalente à n liaisons en parallèle, il suffit de résoudre le système de $6\cdot n$ équations déduit des égalités de torseurs ci-dessus.