Chapitre 1
Cinématique du solide

La lecture des *Éléments* d'Euclide pousse Pierre **Varignon** vers l'étude de la géométrie et de la mécanique. Comprenant tout de suite l'importance du calcul différentiel établi par **Leibniz** et **Newton** en cette fin de XVII^{e} siècle, il démontre aussitôt plusieurs théorèmes de mécanique et il introduit la notion de vitesse à chaque instant que de nos jours, nous appelons vitesse instantanée. Il se bat alors pour faire reconnaître en France l'intérêt du calcul différentiel. C'est sans compter avec la pugnacité de Michel **Rolle**. Ce mathématicien auvergnat, dont le nom est pourtant attaché à un théorème sur la dérivation, reprocha à cette nouvelle théorie de ne reposer sur rien de tangible. À l'automne 1706, Rolle reconnut son erreur et exprima à Varignon sa contrition pour cette mauvaise querelle.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- ▷ La définition du solide et le nombre de degrés de liberté qu'il possède
- ▷ La relation de Varignon
- ▷ La forme générale de la vitesse d'un solide et son expression dans les cas particuliers de translation pure ou de rotation pure autour d'un axe
- ▷ La formule de dérivation dans un trièdre mobile, les formules de changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations
- ▷ La définition du référentiel barycentrique
- ▷ La définition de la vitesse de glissement, la condition de roulement sans glissement

Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Savoir, le cas échéant, décomposer le mouvement d'un solide en termes de translation et de rotation
- ▷ Savoir recenser le nombre de paramètres indépendants intervenant dans l'étude cinématique
- ▷ Savoir choisir une base dans laquelle expliciter simplement le mouvement
- ▷ Savoir mettre en œuvre les formules de changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations
- ▷ Savoir mettre en œuvre la condition de roulement sans glissement entre deux points d'un solide
- ▷ Savoir analyser le mouvement instantané d'un solide

■■ Résumé de cours

■ Le modèle du solide indéformable

❑ Définition

On appelle solide indéformable ou plus simplement solide, un système invariable de points matériels : les distances mutuelles entre les différents points du solide restent constantes.

→ Le solide possède **6 degrés de liberté**.

Remarque

La notion de solide indéformable et donc parfaitement rigide n'est qu'un modèle idéal, la réalité naturelle et technologique étant plus complexe…

■ Distribution des vitesses d'un solide

❑ Relation de Varignon

Soient *A* et *M* deux points d'un même solide *S*. Leur vitesse est liée par la relation de Varigon $\boxed{\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}}$ où $\vec{\omega}(t)$ est le vecteur rotation instantanée du solide que nous noterons plus simplement $\vec{\omega}$.

❑ Mouvement instantané le plus général d'un solide

On appelle axe instantané de viration ou axe central du torseur cinématique (dit encore axe de vissage du solide) l'axe Δ parallèle à $\overrightarrow{\omega(t)}$. En tout point de cet axe, la vitesse est colinéaire à $\overrightarrow{\omega(t)}$. De plus, l'axe Δ est le lieu des points de vitesses minimum du solide.

Soit *O* appartenant à Δ un point du solide *S* et *M* un point quelconque de *S*, la relation de Varignon entre *O* et *M* donne $\boxed{\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_O} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V_{\parallel}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$.

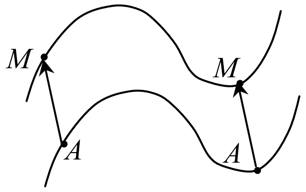
Le terme $\overrightarrow{V_{\parallel}}$ colinéaire à Δ est dit **vitesse de glissement** le long de Δ. $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ est un terme de **rotation** autour de Δ à la vitesse angulaire instantanée ω.

Le mouvement instantané le plus général d'un solide est un mouvement **hélicoïdal**, combinaison d'une translation le long de Δ et d'une rotation autour de Δ.

⇨ **Méthode 1.2. Comment analyser le mouvement instantané d'un solide roulant sans glisser ?**

❑ Mouvement de translation

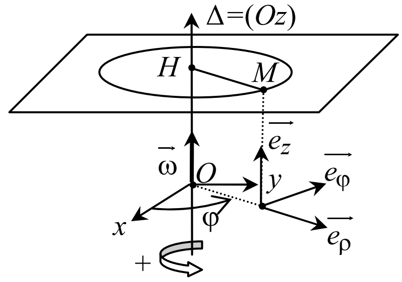
Un solide *S* est dit en translation dans le référentiel (R) si pour tous points *A* et *M* appartenant à *S*, on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{cte}$. Attention il ne s'agit pas ici de translation rectiligne mais curviligne (translation elliptique, circulaire ou suivant une courbe quelconque).



Dans ce cas, $\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{AM}\right)}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A} \quad \forall (A, M) \in S$. Tous les points de S ont même vitesse et même accélération et par comparaison avec la relation de Varignon, on a $\boxed{\overrightarrow{\omega(t)} = \vec{0}}$.

❑ Mouvement de rotation pure autour d'un axe

Un solide S est en rotation autour d'un axe Δ fixe passant par une origine O fixe d'un référentiel (R), lorsque tout point M de S décrit un mouvement de circulaire de rayon HM dans un plan perpendiculaire à Δ, où H est le projeté orthogonal de M sur Δ. En adoptant le système de coordonnées polaires qui est le trièdre adapté aux symétries du problème, la vitesse du point M est $\boxed{\overrightarrow{V_M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$ où $\boxed{\vec{\omega} = \omega\, \overrightarrow{e_z} = \dot{\varphi}\, \overrightarrow{e_z}}$ est orienté suivant le sens de rotation positif à l'aide de la **règle du tire bouchon**.



■ Changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations

Dans tout ce qui suit, (R) rapporté à $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est un référentiel absolu et (R') rapporté à $(O', \overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_{z'}})$ est un référentiel relatif en mouvement dans (R). On note $\vec{\Omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation instantanée de (R') par rapport à (R).

❑ Dérivation dans un trièdre mobile

Soit $\vec{K} = K_{x'}\, \overrightarrow{e_{x'}} + K_{y'}\, \overrightarrow{e_{y'}} + K_{z'}\, \overrightarrow{e_{z'}}$ un vecteur exprimé dans (R'), les dérivées temporelles dans (R) et (R') sont liées par $\boxed{\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{K}}$.

❑ Composition des vitesses de rotation

Soient A et B deux points d'un même solide de référence $S2$ en rotation par rapport à $S0$ et $S1$ avec les vecteurs rotations instantanées respectives $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$ et $\overrightarrow{\omega_{2/1}}$. On associe à chacun de ces solides les référentiels (R_0), (R_1) et (R_2). On a $\boxed{\overrightarrow{\omega_{2/1}} = \overrightarrow{\omega_{2/0}} + \overrightarrow{\omega_{0/1}}}$.

❑ Composition des vitesses

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans (R) et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R').
On définit :

→ sa **vitesse absolue** comme sa vitesse par rapport à (R) : $\overrightarrow{V_a}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R$

→ sa **vitesse relative** comme sa vitesse par rapport à (R') : $\overrightarrow{V_r}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$

→ sa **vitesse d'entraînement** de M comme la vitesse d'un point P fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M : $\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$.

On a alors $\boxed{\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_e}(M)}$.

❑ Composition des accélérations

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans (R) et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R').
On définit :

→ son **accélération absolue** par rapport à (R) : $\overrightarrow{a_a}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_R = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}}{\mathrm{d}t}\right|_R$

→ son **accélération relative** par rapport à (R') : $\overrightarrow{a_r}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{R'} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_r}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$

→ son **accélération d'entraînement** qui est celle d'un point P fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M :

$$\overrightarrow{a_e}(M) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t^2}\right|_R = \overrightarrow{a_a}(P) = \overrightarrow{a_a}(O') + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

→ son **accélération de Coriolis** : $\overrightarrow{a_c}(M) = 2\,\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{V_r}(M)$.

On a alors $\boxed{\overrightarrow{a_a}(M) = \overrightarrow{a_r}(M) + \overrightarrow{a_e}(M) + \overrightarrow{a_c}(M)}$.

■ Deux cas particuliers fréquents : (R') en translation et (R') en rotation uniforme autour d'un axe fixe

❑ Cas de la translation

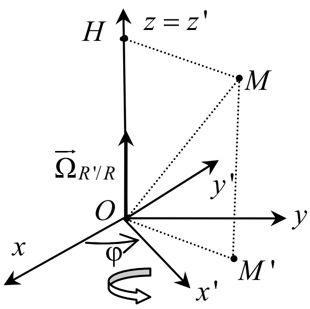
Dans ce cas, les axes du référentiel (R') gardent une direction fixe par rapport à ceux de (R) de sorte que $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$. Ainsi, la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement ont une expression particulièrement simple $\boxed{\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(O')}$ et $\boxed{\overrightarrow{a_e}(M) = \overrightarrow{a_a}(O') = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_e}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_R}$.

L'accélération de Coriolis est nulle puisque $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$.

Remarque

Notons que c'est seulement dans ce cas que l'accélération d'entraînement s'identifie avec la dérivée de la vitesse d'entraînement.

❑ Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe dans (R)



Considérons un référentiel (R') rapporté à $(O', \overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_{z'}})$ en rotation autour de l'axe (Oz) du référentiel (R) rapporté à $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ avec $O = O'$ et (Oz) = (Oz').

Cette rotation est repérée par l'angle $\varphi(t) = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_{x'}}\right)$ et le vecteur rotation de (R') par rapport à (R) s'écrit $\vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_z}$. Lorsque la rotation est uniforme : $\vec{\Omega}_{R'/R} = cte\,\overrightarrow{e_z}$.

En désignant par H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation (Oz) on a :

$\boxed{\overrightarrow{V_e}(M) = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{HM}}$ et $\boxed{\overrightarrow{\gamma_e}(M) = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) = -\Omega^2_{R'/R}\,\overrightarrow{HM}}$.

Remarque

On parle dans ce cas, pour l'accélération d'entraînement, d'accélération centripète puisqu'elle pointe vers le centre H de rotation du point M.

■ Référentiel barycentrique

On appelle référentiel barycentrique, noté (R*), le référentiel dont l'origine coïncide avec le centre de masse du solide et dont les axes ont des directions fixes par rapport au référentiel d'étude (R). (R*) est donc en translation dans (R).

Remarque

Il s'agit ici de translation au sens large, curviligne, elliptique ou circulaire, et pas uniquement rectiligne : pour deux points G et H fixes dans (R*) le vecteur $\overrightarrow{GH}$ reste constant (en norme et direction) au cours du mouvement de (R*) dans (R).

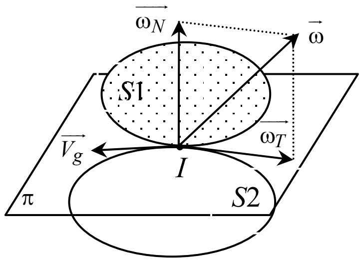
Le mouvement relatif du solide dans (R*) est un mouvement de rotation autour de G de vecteur rotation instantanée $\boxed{\overrightarrow{\omega^*} = \overrightarrow{\omega_{S/R^*}} = \overrightarrow{\omega_{S/R}}}$.

Dans la composition des vitesses et accélérations entre (R) et (R*), on a :

$\boxed{\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(G)}$ et $\boxed{\overrightarrow{a_e}(M) = \overrightarrow{a_a}(G)}$.

■ Cinématique du contact entre deux solides

On s'intéresse ici au contact ponctuel, dans un référentiel (R), entre deux solides $S1$ et $S2$ indéformables, en un point de contact géométrique à l'instant t noté $I(t)$ ou plus simplement I. La réalité physique est bien entendu plus complexe : les solides sont déformables et le contact s'effectue sur une surface. Si les surfaces en contact sont assez régulières, on peut définir un plan commun tangent aux deux solides en contact (noté (π) sur le schéma ci-après).



■ Vitesse de glissement

❑ Définition

I étant le point de l'espace où le contact entre les solides se produit à l'instant t, $I_{1\in S1}$ le point appartenant à $S1$ coïncidant avec I à l'instant t (mais pas à un instant antérieur ou postérieur) et $I_{2\in S2}$ le point appartenant à $S2$ coïncidant avec I à l'instant t, on définit la vitesse de glissement de $S1$ sur $S2$, notée $\overrightarrow{V_g}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment exprimer la vitesse du centre de masse d'un solide roulant sans glisser ?**

La vitesse de glissement s'écrit $\boxed{\overrightarrow{V_g} = \vec{V}_{S1/S2} = \vec{V}_{I_1/S2} = \vec{V}_{I_1\in S1/R} - \vec{V}_{I_2\in S2/R}}$. Les solides étant indéformables, on a $\boxed{\overrightarrow{V_g} \in (\pi)}$.

■ Glissement, pivotement et roulement, roulement sans glissement

La vitesse de $I_{1\in S1}$ par rapport à $S2$ s'écrit $\vec{V}_{M/S2} = \overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{\omega_N} \wedge \overrightarrow{I_1M} + \overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{I_1M}$. Il s'agit donc de la somme de trois termes : la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_g}$, la vitesse de pivotement $\overrightarrow{\omega_N} \wedge \overrightarrow{I_1M}$ et la vitesse de roulement $\overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{I_1M}$.
On dit qu'il y a roulement sans glissement ni pivotement lorsque les deux premiers termes sont nuls. Dans le cadre du programme on néglige le pivotement pour ne retenir que **la condition de roulement sans glissement** (CNG ou CRSG) : $\boxed{\overrightarrow{V_g} = \vec{0}}$.

■■ Méthodes

■ Comment étudier le roulement sans glissement d'un solide sur un support fixe ?

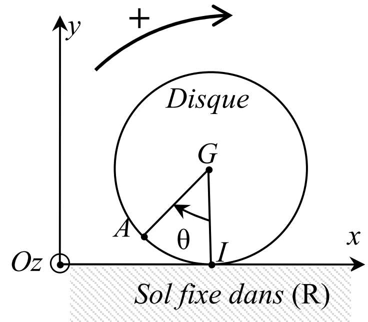
❑ Méthode 1.1. Comment exprimer la vitesse du centre de masse d'un solide roulant sans glisser ?

Pour écrire la condition de non glissement entre deux solides en contact ponctuel, on utilise la nullité de la vitesse de glissement :
$\vec{V_g} = \vec{V}_{S1/S2} = \vec{V}_{I_1/S2} = \vec{V}_{I_1\in S1/R} - \vec{V}_{I_2\in S2/R} = \vec{0}$, $I_{1\in S1}$ étant le point appartenant à $S1$ coïncidant avec I à l'instant t (point de l'espace où le contact entre les solides se produit à l'instant t), et $I_{2\in S2}$ le point appartenant à $S2$ coïncidant avec I à l'instant t. Lorsque le solide $S2$ est fixe dans (R), la vitesse de glissement se réduit à $\vec{V_g} = \vec{V}_{I_1\in S1/R} = \vec{0}$. La formule de Varignon entre $I_{1\in S1}$ et un point C de $S1$, choisi de façon à pouvoir écrire simplement le vecteur $\overrightarrow{CI}_{1\in S1}$ s'écrit $\vec{V}_{1\in S1} = \vec{V_C} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CI}_{1\in S1} = \vec{0}$. Connaissant $\vec{\omega}$, on en déduit alors $\vec{V_C}$.

➪ **Exercices 1.6, 1.7 et 1.8**

Disque roulant sur un support horizontal.

Considérons un disque D de rayon R roulant sur un support fixe horizontal (le sol par exemple) sans glisser (ni pivoter). On appelle $I_{1\in D}$ ou plus simplement I_1 le point du disque coïncidant à l'instant t avec le point I de contact entre le disque et le sol et $I_{2\in sol}$ ou plus simplement I_2 le point du sol coïncidant à l'instant t avec le point I de contact entre le disque et le sol. Soit A un point fixé de la périphérie du disque dont le centre de masse est noté G.



On note $\theta = \left(\overrightarrow{GI}, \overrightarrow{GA}\right)$ l'angle que fait le rayon vecteur $\overrightarrow{GA}$ avec la verticale. Cet angle permet de paramétrer la rotation propre du disque dans son référentiel barycentrique. En effet, dans (R*), on peut écrire $\vec{\omega}_{D/R^*} = -\dot{\theta}\,\vec{e_z}$. D'après la loi de composition des vitesses de rotation, $\vec{\omega}_{D/R} = \vec{\omega}_{D/R^*} + \vec{\omega}_{R^*/R}$. Or, par définition (R*) est en translation par rapport à (R), ainsi $\vec{\omega}_{R^*/R} = \vec{0}$ et donc $\vec{\omega}_{D/R^*} = \vec{\omega}_{D/R} = -\dot{\theta}\,\vec{e_z}$ que l'on note simplement $\vec{\omega}$ (orienté suivant la règle du tire bouchon).

Par définition de la vitesse de glissement on a $\vec{V_g} = \vec{V}_{I_1\in D/R} - \vec{V}_{I_2\in Sol/R}$, or le sol étant fixe dans (R) : $\vec{V}_{I_2\in Sol/R} = \vec{0}$ et $\vec{V_g} = \vec{V}_{I_1\in D/R}$. D'après la