1 Trinôme du second degré

résumés de cours

exercices

contrôles

corrigés

I. POLYNÔMES

Polynôme

Un polynôme de degré n est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui s'écrit sous la forme $x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ où a_n, a_{n-1}, …, a_0 sont des nombres réels et $a_n \neq 0$.

Racines

On dit que α est une racine d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$.

Factorisation

On dit que P se factorise par $(x-\alpha)$ si l'on peut trouver un polynôme Q tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

Théorème

Un polynôme P se factorise par $(x-\alpha)$ si et seulement si α est une racine de P.

II. TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Trinôme du second degré

Un trinôme du second degré est un polynôme de degré 2 de la forme $x \to ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et a est non nul.

Forme canonique du trinôme du second degré

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Racines et signe du trinôme du second degré

Soit P le trinôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$. On appelle discriminant de P le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- Si $\Delta < 0$, P n'a pas de racine et $P(x)$ est toujours du signe de a. De plus, on ne peut pas factoriser P.
- Si $\Delta = 0$, P a une racine double $\frac{-b}{2a}$ et $P(x)$ est toujours du signe de a.

  De plus P se factorise sous la forme $P(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

- Si $\Delta > 0$, P a deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. De plus P se factorise sous la forme $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. Le signe de $P(x)$ est celui de a en dehors des racines et celui de $-a$ entre les racines.

Variation et représentation graphique du trinôme du second degré

- Si $a > 0$

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$P(x)$		$\searrow$	$P\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

- Si $a < 0$

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$P(x)$		$\nearrow$	$P\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$	

On obtient la représentation graphique de $x \to a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta$ a partir de celle de $x \to ax^2$ par une translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$.

✷ Exercice 1 — 3 min

Parmi les fonctions suivantes, indiquer les polynômes et le cas échéant, donner leur degré.

a) x^3-3x+1 b) $x^2+\sqrt{2}x+1$ c) $x^3+\sqrt{2x}+1$

d) $x+\dfrac{1}{x}$ e) $x+1+x^5$ f) $(x+1)^3$

g) $x(x+1)$ h) $\dfrac{1}{x}(x^2-x)$

✷ Exercice 2 — 3 min

On considère l'algorithme suivant : (Remarque : pow(x,2) signifie x²)

```
1 VARIABLES
2   x EST_DU_TYPE NOMBRE
3 DEBUT_ALGORITHME
4   LIRE x
5   x PREND_LA_VALEUR x+3
6   x PREND_LA_VALEUR pow(x,2)
7   x PREND_LA_VALEUR 5*x
8   AFFICHER x
9 FIN_ALGORITHME
```

1. Que renvoie l'algorithme pour $x = 4$?
2. Cet algorithme calcule l'image d'une certaine fonction, laquelle ?
3. Remplacer les lignes 5, 6 et 7 par une seule ligne afin que l'algorithme renvoie l'image de la fonction ci-dessus en une seule étape.

✷✷ Exercice 3 — 20 min

Sans utiliser le discriminant, factoriser chacun des polynômes suivants et faire un tableau de signe. On précisera les racines. Certains d'entre eux ne peuvent pas être factorisés, expliquer pourquoi.

a) $(x+1)^2-9$ b) x^2+1 c) $x^2+10x+25$

d) $(x-3)^2-5$ e) $(x-3)^2+5$ f) $4(x+3)^2-5$

✷✷ Exercice 4 — 15 min

1. Soit P le polynôme défini par $P(x)=(x-1)^2+4$.

a) Soit u et v deux nombres réels, compléter les trous :

$$1<u<v$$
$$\Leftrightarrow ...<u-1<v-1$$
$$\Rightarrow (u-1)^2 ... (v-1)^2 \text{ car } ...$$
$$\Rightarrow (u-1)^2+...<(v-1)^2+...$$
$$\Rightarrow P(u) ... P(v).$$

b) Que peut-on en déduire sur le sens de variation de P ?

c) En vous inspirant de ce qui a été fait précédemment, démontrer que P est décroissant sur $]-\infty\,;1]$.

2. Soit Q définit par $Q(x)=(x+2)^2-3$. En vous inspirant de ce qui a été fait à la question **1**, démontrer que Q est croissant sur $[-2\,;+\infty[$ et décroissant sur $]-\infty\,;-2]$.

✷ Exercice 5 — 10 min

1. Soit P le polynôme donné par $P(x)=2x^2+4x-6$, montrer que : $P(x)=2(x-1)(x+3)$.

2. Soit Q le polynôme défini par $Q(x)=x^2+x-2$. Déterminer le nombre réel a tel que $Q(x)=(x-1)(x-a)$. Calculer $Q(a)$.

3. Soit F le polynôme défini par $F(x)=x^2-x-2$. Calculer $F(2)$. En déduire une factorisation de F.

✷ Exercice 6 — 5 min

Compléter les pointillés en utilisant les identités remarquables :

a) $x^2+2x+...=(x+...)^2$

b) $x^2-6x+...=(x+...)^2$

c) $x^2+x+...=(x+...)^2$

d) $x^2-5x+...=(x-...)^2$

e) $x^2+\sqrt{2}x+...=(x+...)^2$

f) $x^2-2x+...=(-x+...)^2$

✷ Exercice 7 — 15 min

Mettre sous forme canonique les trinômes suivants en suivant le modèle :

$$x^2+6x+5=x^2+6x+3^2-3^2+5=(x+3)^2-4.$$

a) x^2+6x+1 b) x^2-3x+1 c) $x^2-12x+36$

d) $3x^2+6x+3$ e) $3x^2+6x-3$ f) $-3x^2+6x+3$

✷ Exercice 8 — 5 min

Chacun des polynômes suivants s'écrivent sous la forme ax^2+bx+c. Reconnaître a, b et c ; calculer le discriminant Δ et en déduire le nombre de racines.

Polynôme	a	b	c	Δ	Nombre de racines
a) $2x^2+3x-3$					
b) $-3x^2+x+3$					
c) $-2x+3+x^2$					
d) $x^2+3-\sqrt{2}x+1$					

✷ Exercice 9 — 10 min

Soit P le trinôme du second degré défini par $P(x)=ax^2+bx+c$.

```
VARIABLES
 a EST_DU_TYPE NOMBRE
 b EST_DU_TYPE NOMBRE
 c EST_DU_TYPE NOMBRE
 delta EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
 LIRE a
 LIRE b
 LIRE c
 delta PREND_LA_VALEUR pow(b,2)-4*a*c
 SI (delta <0) ALORS
   DEBUT_SI
   AFFICHER "Il n'y a pas de solution"
   FIN_SI
FIN_ALGORITHME
```

1. Tester l'algorithme avec le trinôme suivant : $3x^2+4x+12$. Que fait l'algorithme ?

2. Compléter cet algorithme pour les cas suivants :

a) Le discriminant est nul.

b) Le discriminant est strictement positif.

3. Tester le nouvel algorithme avec les trinômes suivants :

a) $5x^2+10x+5$

b) $x^2+\frac{3}{2}x-1$

✷ Exercice 10 — 20 min

Déterminer les racines des trinômes suivants et mettre chacun d'eux sous forme factorisée. En déduire un tableau de signe.

a) x^2-x-6 b) $x^2-x-\frac{15}{4}$ c) $3x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{3}$

d) $-3x^2+\frac{6}{35}x+\frac{3}{35}$ e) $7x^2+3x-2$ f) $7x^2+3x+2$.

✷ Exercice 11 — 15 min

Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

a) $3x^2+4x+1=0$ b) $-3x^2+4x+2>0$ c) $x^2+4x+4>0$

d) $x^2+4x+4\leq 0$ e) $3x^2+4x+1=x^2+3$ f) $-3x^2+4x+2<3x^2+1$

✷ Exercice 12 — 5 min

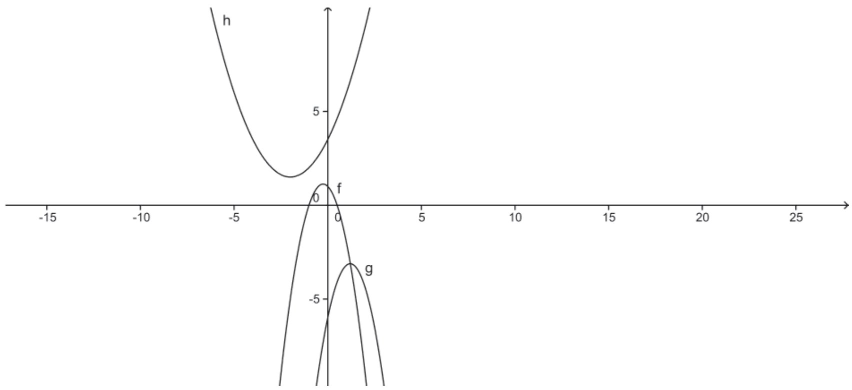
Soit P un polynôme du second degré avec $P(x)=ax^2+bx+c$ et soit Δ son discriminant.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes.

1. Si Δ est positif alors P est positif.
2. Si Δ est strictement positif alors P n'a pas de racines.
3. Si Δ est nul alors P est toujours du même signe.
4. Si $\Delta<0$ alors on ne peut pas factoriser P.
5. Si $P>0$ alors $\Delta<0$.
6. Si $P<0$ alors $\Delta>0$.

✷✷ Exercice 13 — 15 min

A. (QCM) Soit f le polynôme dont on fournit la représentation graphique suivante, avec $f(x)=ax^2+bx+c$ et soit Δ son discriminant. Une et une seule réponse est bonne. Les questions ne sont pas indépendantes.



1. a) $a \geq 0$ b) $a \leq 0$ c) on ne peut pas déterminer le signe de a.
2. a) $\Delta \geq 0$ b) $\Delta \leq 0$ c) on ne peut pas déterminer le signe de Δ.
3. a) $c \geq 0$ b) $c \leq 0$ c) on ne peut pas déterminer le signe de c.

B. Recommencer le QCM avec g puis avec h.

✸ Exercice 14 — 5 min

Donner les tableaux de variations des trinômes P et Q définis par :
$P(x) = -3x^2 + 9x - 1$ et $Q(x) = 2x^2 + x - 1$.

✸ Exercice 15 — 5 min

Soit P et Q deux trinômes du second degré dont on donne les tableaux de variations.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$P(x)$		↘	3	↗	

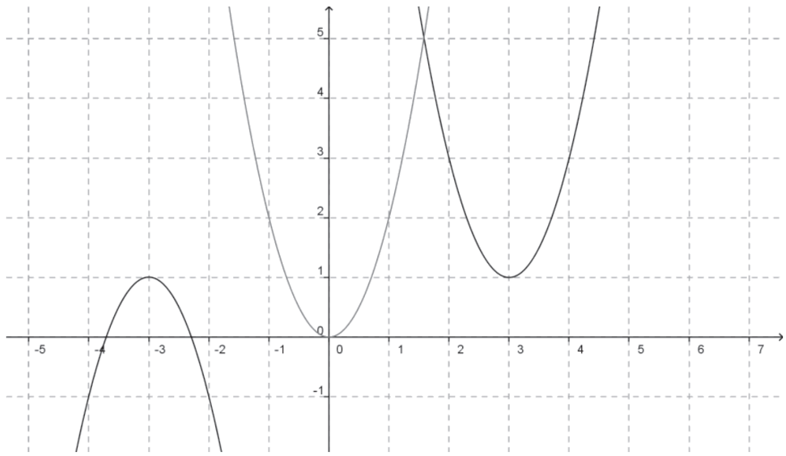
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$Q(x)$		↗	5	↘	

On sait de plus que $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $|a|=2$ et que $Q(x)=ux^2+vx+w$ avec $|u|=1$.

Déterminer P et Q.

✷✷✷ Exercice 16 — 15 min

1. La parabole au centre est la représentation graphique du trinôme $2x^2$. Déterminer les formes canoniques des trinômes dont les représentations graphiques sont les deux autres paraboles.



2. Déterminer les formes canoniques des trinômes dont les représentations graphiques sont les paraboles données ci-dessous.