CHAPITRE 1

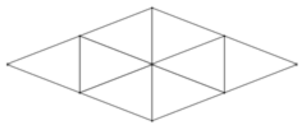
Numération

Questionnaire ✪ 10

1. Parmi ces nombres, entourez ceux qui sont solutions de l'équation $x(x+3)=10$.

   A) -5 **B)** -2

2. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'équation suivante $\frac{x}{2}+3=165$.
3. Combien de triangles effectivement dessinés peut-on observer sur la figure suivante ?

   A) 5 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10

4. Calculer sans calculatrice : 258×29.
5. Calculer de tête 25×101.
6. Quel est le chiffre des dizaines dans le nombre $N = 12 \times 12$?
7. Quel est le nombre de dizaines dans le nombre $N = 12 \times 12$?
8. Quel est l'ensemble des nombres à deux chiffres dont le « chiffre » des dizaines est le « triple » du chiffre des unités ?
9. En choisissant 4 mots nombres parmi *quatre*, *sept*, *neuf*, *vingt(s)*, *cent(s)*, *million(s)*, composer le nombre le plus grand possible.
10. Dans le nombre 3,141 indiquer le nombre de centièmes.
11. Dans le nombre 3,141 indiquer le chiffre des centièmes.
12. Dans le nombre 3,141 indiquer le nombre de dixièmes de centièmes.
13. Le prix de l'essence a augmenté de 50 % en dix ans donc cela fait une augmentation de 5 % par an en moyenne.

    A) Vrai **B)** Faux

14. Le nombre de dizaine de N^2 est 41. Quelles sont les valeurs possibles pour N ?

Corrigé

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Réponse	A	324	D	7482	2525	4	14	↓	↓	314	4	3141	B	↓

Quelques explications :

1. Il ne s'agit pas de résoudre l'équation mais simplement de vérifier si les nombres proposés sont solution de l'équation.
2. $\frac{x}{2} + 3 = 165 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 162 \Leftrightarrow x = 162 \times 2 = 324$.
4. Il est possible de poser la multiplication ou d'effectuer un calcul réfléchi en utilisant les propriétés des opérations :

$$\begin{aligned} 258 \times 29 &= 258 \times (30 - 1) = 258 \times 30 - 258 \\ &= 258 \times 3 \times 10 - 258 = 774 \times 10 - 258 \\ &= 7740 - 258 = 7540 - 58 = 7500 - 18 \\ &= 7482 \end{aligned}$$

5. $25 \times 101 = 25 \times 100 + 25 = 2525$.
6. $12 \times 12 = 144$. Le chiffre des dizaines est donc 4.
7. $12 \times 12 = 144 = 14 \times 10 + 4$. Le nombre de dizaines est 14.
8. $\{31; 62; 93\}$.
9. Neuf-cent-vingt millions.
13. Si l'essence augmente de 5 % par an pendant dix ans, cela signifie que son prix est multiplié par 1,05 toutes les années. Donc, au bout de dix ans son prix est multiplié par $1{,}05^{10}$ qui vaut environ 1,62. Ce qui fait une augmentation de 62 % et non de 50 %.
14. Il n'y a pas de solution : on sait que le carré de 20 vaut 400 et possède donc 40 dizaines et le carré du nombre entier suivant (21) vaut 441 et contient 44 dizaines.

Cours

I Chiffres et nombres

Le *nombre* sert à exprimer le cardinal d'une collection d'objets, comme celle ci-contre.
Pour écrire un nombre, plusieurs systèmes de numération sont utilisables. Le tableau suivant donne l'écriture, dans différents systèmes de numération, d'un nombre exprimant le cardinal de la collection ci-contre.

Décimal	Egyptien	Romain
17	∩ IIIIIII	XVII

Chaque système de numération utilise des symboles, appelés *chiffres*, pour coder le nombre. Par exemple : « 1 », « V », « ∩ ».

L'écriture d'un nombre dans notre système est appelé *écriture décimale*.

II Décomposition canonique

Dans notre système positionnel en base 10, le nombre de droite désigne les unités, celui directement à sa gauche, celui des dizaines et ainsi de suite. Ce principe se traduit par la décomposition suivante :

$$423 = 4 \times 100 + 2 \times 10 + 3$$

Cette écriture n'a que peu d'intérêt pour le nombre 423. Mais quand il s'agit de nombres inconnus pour lesquels des informations sont données, elle est très utile.

♦ **Exemple** : les nombres de trois chiffres dont celui des unités est 4 et celui des centaines est 7 s'écrivent $\overline{7a4}$ où a est un nombre compris entre 0 et 9.

★ **Remarque** : la barre au dessus de $\overline{7a4}$ signale qu'il s'agit de l'écriture d'un nombre en base 10 pour éviter de confondre avec le produit $7 \times a \times 4$.

♠ **Activité**. Critère de divisibilité par 3.

Démontrez, qu'un nombre de trois chiffres est multiple de trois si et seulement si la somme de ces trois chiffres est multiple de trois.

Corrigé. Remarquons, tout d'abord, que l'expression « la somme de ces trois chiffres » est incorrecte. En effet, on ne peut ajouter les symboles (chiffres) mais les nombres qui sont représentés par ces symboles. Cependant cet abus de langage est souvent effectué pour alléger les expressions.
Ce nombre s'écrit $\overline{abc}$ où a est le chiffre des centaines, b celui des dizaines, c celui des unités.
La somme de ces chiffres s'écrit alors : $S = a + b + c$.

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c = 3(33a + 3b) + S.$$

Si la somme S des trois chiffres est multiple de trois alors, il existe un nombre k tel que $S = a + b + c = 3k$. On peut donc écrire que :

$$\overline{abc} = 3(33a + 3b) + 3k = 3(33a + 3b + k).$$

Il est donc multiple de 3. Si $\overline{abc}$ est multiple de trois alors, il existe un nombre h tel que $\overline{abc} = 3h$. On peut donc écrire S sous la forme :

$$S = \overline{abc} - 3(33a + 3b) = 3h - 3(33a + 3b) = 3(h - 33a - 3b).$$

S est donc multiple de 3.
Les deux propriétés « $\overline{abc}$ est multiple de trois » et « $S = a+b+c$ est multiple de trois » sont donc bien équivalentes.

♠ **Activité**. Variantes de l'écriture canonique.

Compléter le tableau suivant comme dans l'exemple.

Description	Ecriture
Un nombre quelconque dont le chiffre des unités est 3	$10 \times A + 3$
Un nombre quelconque dont le chiffre des dizaines est 3	
	$\overline{a4b}$ ou $100\times a+40+b$
Un nombre quelconque « se terminant » par 27	
	$100 \times A + 70 + b$
Un nombre de trois chiffres dont le chiffre des dizaines est 9	

Corrigé. Dans le tableau, les nombres en minuscules désignent des nombres inférieurs ou égaux à 10 et les autres des nombres quelconques.

Description	Ecriture
Un nombre quelconque dont le chiffre des unités est 3	$10 \times A + 3$
Un nombre quelconque dont le chiffre des dizaines est 3	$100 \times A + 30 + b$
Un nombre d'au plus trois chiffres dont le chiffre des dizaines est 4	$\overline{a4b}$ ou $100\times a+40+b$
Un nombre quelconque « se terminant » par 27	$100 \times A + 27$
Un nombre quelconque dont le chiffre des dizaines est 7	$100 \times A + 70 + b$
Un nombre de trois chiffres dont le chiffre des dizaines est 9	$\overline{a9b}$ ou $100\times a+90+b$ et $a \neq 0$

III Ecriture scientifique d'un nombre entier

Essayons d'énoncer oralement cette phrase : « la lumière parcourt 299792458 mètres par seconde ». Pour énoncer ce nombre, certains mots nombres sont nécessaires : milliards, cent, millions, etc.

On sait que 2 est le chiffre de valeur positionnelle la plus grande mais on ne sait pas quelle est cette valeur. Il nous faut interrompre notre lecture de gauche à droite, lire le nombre de droite à gauche, selon le mode de lecture arabe, pour savoir comment placer les mots nombres : 299 millions 792 mille 458.

On peut faciliter le placement des mots nombres en préparant les triplets de chiffres : 299 792 458, mais en partant de la droite, ce qui ne résout pas la difficulté.

L'écriture dite scientifique, permet d'accéder directement aux premiers mots nombres à énoncer car elle explicite le nombre de groupement par 10 successifs, c'est-à-dire la valeur positionnelle du premier chiffre.
Dans notre exemple, cela donne : $2{,}997\ 924\ 58 \times 10^8$.
Si on sait que deux groupements successifs donnent l'ordre de la centaine et six groupements successifs par 10 donnent l'ordre du million, on déduit très vite que $10^8 = 10^2 \times 10^6$ est une centaine de millions. On commencera donc à énoncer : deux cent millions ...

♦ **Exemple** : Calculons un ordre de grandeur de la distance parcourue par la lumière en une année de 365,25 jours. La lumière parcourt $2{,}997\,924\,58 \times 10^8$ mètres par seconde. La distance, en mètre, est autant de fois plus grande qu'il y a de secondes en une année :

$$2{,}997\,924\,58 \times 10^8 \times 3{,}6 \times 10^3 \times 2{,}4 \times 10^1 \times 3{,}652\,5 \times 10^2 \text{ m}$$

♠ **Activité**. Encadrer par des puissances de dix

Sans utiliser la calculatrice, encadrer chaque nombre par deux puissances de dix successives, $(10^n \leq ... < 10^{n+1})$:

$$132 \quad ; \quad 2011 \quad ; \quad 0{,}005\,68 \quad ; \quad 0{,}5 \quad ; \quad 1\,000\,000\,000 \quad ; \quad \frac{656768}{28}$$

Corrigé.

$$10^2 \leq 132 < 10^3 \quad ; \quad 10^3 \leq 2011 < 10^4 \quad ; \quad 10^{-3} \leq 0{,}005\,68 < 10^{-2}$$

$$10^{-1} \leq 0{,}5 < 10^0 \quad ; \quad 10^9 \leq 1\,000\,000\,000 < 10^{10}$$

$$28 \times 10^4 < 656768 < 28 \times 10^5 \text{ donc } 10^4 < \tfrac{656768}{28} < 10^5$$

♣ **Propriété**

Soit N un nombre positif, alors il existe un unique entier relatif n tel que : $10^n \leq N < 10^{n+1}$.

♠ **Activité**. Ecriture sous condition

Ecrire chaque nombre sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre vérifiant $1 \leq a < 10$ et n un entier relatif :

$$8945 \quad ; \quad 35 \times 10^{12} \quad ; \quad 0{,}000\,275 \quad ; \quad 0{,}5 \times 10^7 \quad ; \quad 12{,}535 \times 10^{-5}$$

Corrigé.

$$8945 = 8{,}945 \times 10^3 \quad ; \quad 35 \times 10^{12} = 3{,}5 \times 10^{13} \quad ; \quad 0{,}000\,275 = 2{,}75 \times 10^{-4}$$

$$0{,}5 \times 10^7 = 5 \times 10^6 \quad ; \quad 12{,}535 \times 10^{-5} = 1{,}253\,5 \times 10^{-4}$$

♥ **Définition**. Ecriture scientifique

Pour tout nombre positif N, il existe une unique écriture de la forme $N = a \times 10^n$ avec :
- n un entier relatif.
- $1 \leq a < 10$

Cette écriture est l'écriture scientifique du nombre N.

♣ **Propriété**. Relations sur les puissances de dix

Pour a et b des entiers on obtient :
- $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$
- $(10^a)^b = 10^{a \times b}$

IV Système métrique international

Dans le système métrique international on utilise les préfixes suivants :

Préfixe de l'unité de mesure	Puissance de 10 multipliant l'unité	Notation
milli-	10^{-3}	m—
unité	10^0	—
kilo-	10^3	k—
méga-	10^6	M—
giga-	10^9	G—

Questionnaire ✪ 15

1. Calculer mentalement $13{,}6 - 8 + 2$

   A) 5,6 **B)** 3,6 **C)** 6,6 **D)** 7,6

2. u désigne un nombre à un chiffre distinct de 0. Dans le produit $99 \times u$, comment le chiffre des unités du produit s'écrit-il en fonction de u ?

   A) u **B)** $-u$ **C)** $10 - u$

3. Dans le nombre 12586269025, chiffré en base 10, combien y a-t-il de milliards ?

   A) 12 **B)** 1 **C)** 2

4. Combien y a-t-il de chiffres dans l'écriture décimale du produit de 2×10^5 par 2×10^4 ?

   A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 20

5. Quel est l'intrus ?

   A) 10^9 kg **B)** 10^{15} mg **C)** 10^7 dag **D)** 10^{12} g

6. Le nombre de chiffre dans l'écriture de la moitié d'un nombre est la moitié du nombre de chiffre de l'écriture de ce nombre.

   A) Vrai **B)** Faux

7. Quelle est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10^7 mm et 10^{-2} m ?

   A) 10^4 m^2 **B)** 10^4 mm^2 **C)** 10^4 dm^2 **D)** 10^3 m^2

8. Combien vaut la moitié de 10^{24} ?

9. Combien y a-t-il de chiffres dans l'écriture décimale la somme de 10^{12} et de 10^7 ?

   A) 20 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 19

10. Combien de zéros y a-t-il dans l'écriture décimale du quotient de 10^{24} par 10^{-3} ?

    A) 21 **B)** 24 **C)** 27

Corrigé

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Réponse	D	C	A	C	C	B	C	5×10^{23}	D	C

Quelques explications :

2. $99 \times u = 100u - u = 100(u - 1) + 90 + (10 - u)$. $(10 - u)$ est donc le chiffre des unités du produit $99 \times u$.
4. $2 \times 10^5 \times 2 \times 10^4 = 4 \times 10^9$.
6. La moitié de 24 est 12 et ils ont le même nombre de chiffres !
8. $\frac{10^{24}}{2} = \frac{10}{2} \times 10^{23} = 5 \times 10^{23}$.
9. 10^{12} s'écrit avec 13 chiffres (un chiffre 1 et 12 zéros). Si on ajoute 10^7, cela ne change pas le nombre de chiffres.

Exercices

I Pour démarrer

Exercice 1. Du dénombrement ❂ 20 | ✠ p 201

Déterminer le nombre d'entiers naturels inférieurs strictement à 1000 dont la somme des chiffres est égale à 6.

Exercice 2. Un entier qui grandit ❂ 15 | ✠ p 201

Un nombre, N, entier positif est codé avec 4 chiffres en base 10. On crée deux autres nombres, N_1 et N_2 , obtenus en accolant le chiffre 1 respectivement à gauche et à droite de N.

1. Indiquer quelle(s) opération(s) on applique à N pour obtenir le nombre N_1 ? Pour obtenir le nombre N_2 ?
2. Les nombres N_1 et N_2 peuvent-ils être égaux ?
3. On considère maintenant un nombre N quelconque (le nombre de chiffres n'est pas limité). Trouver tous les nombres N tels que N_1 et N_2 sont égaux.

II Pour se perfectionner

Exercice 3. Formule magique ❂ 10 | ✠ p 202

Choisir un nombre entre 1 et 9. Le multiplier par 9. Soustraire ce produit à 10 fois votre âge. Additionner le nombre de dizaines et le chiffre des unités de la différence obtenue précédemment. Quelle valeur remarquable obtient-on ? Expliquer.

Exercice 4. ❂ 30 | ✠ p 202

On considère les nombres N, de 4 chiffres, strictement inférieurs à 2000 et dont le chiffre des dizaines est identique à celui des centaines.

1. Combien existe-t-il de nombres N ?
2. Quel est le plus grand nombre N, multiple de 4 ?
3. Trouver tous les nombres N multiples de 3 et de 5.
4. On note N', le nombre obtenu en intercalant un zéro entre le chiffre des dizaines et celui des centaines. Montrer que $N' - N$ est un multiple de 9.

Exercice 5. Bornes kilométriques ❂ 15 | ✠ p 203

Pierre quitte le village de l'Abadie en roulant à vitesse constante. Il croise d'abord une borne kilométrique indiquant sa distance à l'Abadie. Cette borne porte deux chiffres. Une heure plus tard, il croise une deuxième borne kilométrique portant les deux mêmes chiffres mais dans l'ordre inversé. Une heure plus tard encore, il croise une troisième borne portant les mêmes chiffres que sur la première borne mais séparés par un zéro. Quelle est la vitesse de Pierre ?

III Sujet de concours

Exercice 6. CRPE 2008, groupe 3 ❂ 25 | ✠ p 203

1. Un nombre de trois chiffres est tel que :
   – la somme de ses trois chiffres est égale à 14 ;
   – ce nombre est plus grand que son nombre « retourné ». Exemple : si le nombre est 651, son nombre retourné est 156 ;
   – la différence entre ce nombre et son nombre « retourné » est 99 ;
   – la différence entre le double du chiffre des dizaines et le triple du chiffre des centaines est égale à 2.

   Trouver ce nombre en expliquant votre démarche.
2. En observant les nombres 297, 880 et 242, un élève a formulé la conjecture :

   « *Tout nombre à trois chiffres dans lequel le chiffre des dizaines est la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités est divisible par 11* ».

   (a) Cette conjecture s'applique-t-elle au nombre trouvé à la question 1 ?

   (b) La conjecture de l'élève est-elle effectivement vraie ? Justifier la réponse.

   (c) Trouver un nombre de 3 chiffres qui soit divisible par 11 et dans lequel le chiffre des dizaines n'est pas la somme du chiffre des centaines et de celui des unités.