Chapitre 1

Les probabilités

Enoncés

Exercice 1

A, B et C sont des parties d'un ensemble E.

1 - L'ensemble E est-il probabilisable sachant que :
$\mathbf{P(A) = 0,7 \ ; \ P(B) = 0,2 \ \text{ et } \ P(A \cap B) = 0,3 \ ?}$

Si oui, calculer $\mathbf{P(A \cup B), P(A \cap \overline{B}), \text{ et } P(\overline{A} \cap B)}$

2 - Même question avec :
$\mathbf{P(A) = 0,4 \ ; \ P(B) = 0,6 \ \text{ et } \ P(A \cap B) = 0,3}$

Exercice 2

Au sein d'une population de 1 000 individus, on en a dénombré 120 atteints d'une maladie M, les 880 autres étant indemnes de cette maladie.

1 - Quelle est la probabilité pour qu'un individu tiré au hasard au sein de cette population soit atteint de la maladie M ?
2 - On observe un petit échantillon de 5 sujets tirés au hasard (avec remise) au sein de cette population. Quelle est la probabilité que les 5 sujets soient indemnes de la maladie M ?

Exercice 3

La probabilité de naissance d'un garçon est de 0,51. Un couple a décidé de fonder une famille de 4 enfants. Il désirait avoir trois filles et un garçon. En supposant l'absence de possibilité de grossesse multiple, quelles sont les probabilités que le couple réalise son vœu :

1 - dans le cas où le garçon est le dernier de la fratrie.
2 - dans le cas où le garçon occupe un rang quelconque de la fratrie.

Exercice 4

Un rayonnement X a une probabilité 0,3 d'atteindre une cible donnée.
Combien de fois faut-il répéter l'irradiation pour que la probabilité de toucher la cible soit égale à au moins 0,8 ?

Exercice 5

Si M est une maladie et E un facteur d'exposition ($\mathbf{\overline{M} \text{ et } \overline{E}}$ étant les complémentaires respectifs de M et E), on quantifie le risque de survenue de la maladie M quand on est exposé au facteur E par la quantité appelée odds-ratio, notée OR, et égale à :

$$\mathbf{OR} = \frac{P[M/E]}{1-P[M/E]} \Big/ \frac{P[M/\bar{E}]}{1-P[M/\bar{E}]}$$

Ou par le risque relatif : $\mathbf{RR} = P(M/E) / P(M/\bar{E})$

1 - Montrer que OR peut s'écrire aussi sous la forme

$$\mathbf{OR} = \frac{P[E/M]}{1-P[E/M]} \Big/ \frac{P[E/\bar{M}]}{1-P[E/\bar{M}]}$$

2 - Montrer que : $\mathbf{RR} = \mathbf{OR} - (\mathbf{OR} - 1) \,.\, P(M/E)$

Exercice 6

Dans une maternité on constate que sur l'ensemble des accouchements, 20 % présentent des complications et 10 % ont lieu avant le terme normal (40 semaines).

1 - Si le terme est indépendant de l'existence de complications, quelle est la probabilité pour qu'une femme ait un accouchement normal à terme ?

2 - En fait, il y a 40 % de complications quand l'accouchement a lieu avant terme. Dans ces conditions, quelle est la probabilité :

a - d'un accouchement avant terme et avec complications ?

b - d'un accouchement normal à terme.

Exercice 7

Des études antérieures ont montré que 25 % des infections graves sont dues à des infections nosocomiales, que 15 % des infections graves non dues à des infections nosocomiales provoquent un décès tandis que cette proportion s'élève à 30 % quand il s'agit d'une infection grave due à une infection nosocomiale.
Dans un service hospitalier, un décès survient suite à une infection grave.
Quelle est la probabilité que le décès soit dû à une infection nosocomiale ?

Exercice 8

Sur la liste des étudiants admis en première année des études de santé (PACES) à l'université U_1, on relève 30 % de filles parmi les reçus avec mention (TB, B ou AB). Pour le même niveau d'examen, la proportion est double à l'université U_2.
On note F l'événement « le nom choisi sur la liste est celui d'une fille » et M l'événement « obtenir son examen avec mention ».

1 - Le pourcentage de reçues avec mention parmi **les candidates** est-il deux fois plus élevé à U_2 qu'à U_1 ?

2 - Répondre à la même question en sachant que :

- 20 % des étudiants qui se sont présentés à l'examen l'ont obtenu avec mention à l'université U_1 contre 10 % à l'université U_2.
- 40 % des candidats à l'examen à U_1 étaient des filles alors qu'il s'est présenté à U_2 quatre fois plus de filles que de garçons.

Exercice 9

Une matière étant enseignée par 3 professeurs (A, B, C), le sujet d'examen est susceptible d'être donné par l'un des 3 enseignants. D'après les statistiques des années précédentes et aussi d'après les charges d'examens prévues, les étudiants évaluent à :

- 0,35 la probabilité que ce soit l'enseignant A qui pose le sujet
- 0,40 la probabilité que ce soit l'enseignant B qui pose le sujet
- 0,25 la probabilité que ce soit l'enseignant C qui pose le sujet

Par ailleurs, ils redoutent qu'un certain chapitre (R) fasse l'objet d'une question à l'examen.
Par des déductions psychologiques, ils évaluent à : 10 % la probabilité que le chapitre R soit choisi si c'est l'enseignant A qui pose le sujet, 40 % si c'est l'enseignant B, 80 % si c'est l'enseignant C. Le jour J arrive et l'événement tant redouté se produit.
Quelles sont les probabilités que le sujet ait été posé par :

- L'enseignant A ?
- L'enseignant B ?
- L'enseignant C ?

Exercice 10

On suppose que la femme en période d'activité génitale est fécondable entre le jour **J1** (11^{e} jour du cycle) et le jour **J6** (16^{e} jour du cycle).
Soit $\mathbf{P_t}$ la probabilité de fécondation au jour t quand il y a eu un rapport et $\mathbf{X_t}$ la variable dichotomique prenant la valeur 1 s'il y a un rapport le jour t et 0 sinon.

1 - Calculer la probabilité $\mathbf{P(C)}$ de fécondité pour un cycle en supposant que la fécondité est indépendante d'un jour à l'autre pour une femme donnée.

2 - Soit $\mathbf{Vt}$ la probabilité qu'un embryon conçu à l'instant t se développe. Calculer la probabilité d'avoir une fécondation viable $\mathbf{P(G)}$ dans un cycle en supposant que les développements des grossesses sont indépendants.
Si $\mathbf{Vt = Vo = cte}$, quelle relation lie $\mathbf{P(G)}$ et $\mathbf{P(C)}$?

Exercice 11

Dans le cadre d'un essai thérapeutique, on souhaite constituer un échantillon aléatoire de 4 patients parmi les 15 patients vérifiant les critères d'inclusion dans l'essai et présents un jour donné dans un service de médecine.

1 - Le nombre d'échantillons différents de 4 patients constitué à partir des 15 patients est :

A. Egal à 1 365
B. Egal à 32 370
C. Egal à 15! / 4!
D. Inférieur au nombre d'échantillons différents de 11 personnes parmi 15 personnes

E. Inférieur au nombre d'échantillons différents de 3 personnes parmi 16 personnes

2 - On souhaite constituer un échantillon de 4 personnes, composé de 2 femmes et de 2 hommes, parmi les 15 patients du service répartis en 7 femmes et 8 hommes. Le nombre d'échantillons différents que l'on peut former est égal à :

A. C_{15}^{4}

B. $C_{15}^{8} \times C_{8}^{2}$

C. $C_{7}^{2} + C_{8}^{2}$

D. $C_{15}^{7} \times C_{15}^{8}$

E. $C_{7}^{2} \times C_{8}^{2}$

Exercice 12

Un patient peut avoir l'une de deux formes (A et B) d'une maladie M avec les probabilités suivantes : $P(A) = 0,57$ et $P(B) = 0,43$. Chaque forme correspond à un traitement différent $(T_A \text{ ou } T_B)$ qui peuvent tous les deux donner un même effet secondaire grave (G) avec les probabilités suivantes : $P(G_A) = 0,09$ et $P(G_B) = 0,04$

1 - Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes ?

A. $P(G_A)$ est la probabilité conditionnelle $P(G/T_A)$

B. Pour un patient, la probabilité d'avoir la forme A de la maladie M et l'effet secondaire grave G est égale à : $0,57 \times 0,09 = 0,0513$

C. Pour un patient atteint de la maladie M, la probabilité d'avoir l'effet secondaire G est égale à : $0,09 + 0,04 = 0,13$

D. Pour un patient atteint de la maladie M, la probabilité d'avoir l'effet secondaire G est égale à : $\dfrac{0,09}{0,57} + \dfrac{0,04}{0,43} = 0,25$

E. Pour un patient atteint de la maladie M, la probabilité de ne pas avoir l'effet secondaire G avec la forme B vaut 0,96

2 - La probabilité qu'un patient, pris au hasard dans la population de malades traités pour la maladie M, ne présente pas l'effet secondaire G :

A. Ne peut pas être calculée

B. Est égale à 0,0685

C. Est égale à 0,8700

D. Est égale à 0,9315

E. Est égale à 0,9385

3 - Trois sujets chez qui on a diagnostiqué la maladie M, sans que l'on sache encore la forme $(A \text{ ou } B)$, sont admis dans un service hospitalier. La probabilité a priori que l'un d'entre eux seulement présente l'effet secondaire G une fois le traitement adapté mis en place est égale à :

A. $1/3$

B. $C_3^1 \times 0{,}0685^2 \times 0{,}9315$

C. $3 \times 0{,}0685 \times 0{,}9315^2$

D. $0{,}0685 \times 0{,}9315^2$

E. $1 - 3 \times 0{,}0685 \times 0{,}9315^2$

Exercice 13

Dans le cadre d'une étude épidémiologique on s'intéresse à un paramètre biologique X au sein d'une population R à haut risque d'avoir une maladie M.

1 - Chez les sujets atteints de la maladie M, le paramètre biologique X, exprimé en UI, suit une loi de Gauss : N (28,5 ; 10).
Chez ces sujets, la probabilité que X soit supérieur à 12 UI :
A. Dépend de la probabilité d'avoir la maladie M au sein de la population R
B. Permet de calculer la sensibilité d'un test qui serait basé sur la valeur de X
C. Est égale à 0,05
D. Est égale à 0,95
E. Est supérieure à 0,99

On souhaite utiliser ce paramètre biologique pour faire le dépistage de la maladie M au sein de la population R en prenant comme valeur seuil de X la valeur 12 UI. On sait par ailleurs que les sujets malades ont en moyenne une valeur de X supérieure à celle observée chez les non malades. Parmi les sujets de la population R non atteints de la maladie M, 10 % de sujets ont une valeur de X supérieure à 12 UI. De plus on sait que la probabilité d'avoir la maladie M au sein de la population R est de 25 %

2 - La probabilité que le sujet soit atteint de la maladie M sachant que la valeur de X est supérieure à 12 UI :
A. Dépend de la probabilité d'avoir la maladie M au sein de la population R
B. Correspond à la valeur prédictive positive (VPP) d'un test de dépistage
C. Est égale à 0,24
D. Est égale à 0,76
E. Est égale à 0,98

3 - La probabilité que le sujet ne soit pas atteint de la maladie M sachant que la valeur de X est supérieure à 12 UI :
A. Dépend de la probabilité d'avoir la maladie M au sein de la population R
B. Correspond à la valeur prédictive négative (VPN) d'un test de dépistage
C. Est égale à 0,24
D. Est égale à 0,76
E. Est égale à 0,98

Corrigés

Exercice 1

1 - L'ensemble E défini par les différentes probabilités indiquées n'est pas probabilisable car il est impossible que $P(A\cap B)$ soit supérieur à $P(B)$. En effet :

$$B = (A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B) \quad \text{avec } (A\cap B)\cap(\bar{A}\cap B)=\varnothing$$

$$\text{et } P(B) = P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B) \Rightarrow \quad P(A\cap B)=P(B)-P(\bar{A}\cap B)$$

2 - Dans ce cas, rien ne s'oppose à la définition d'une probabilité sur E.

- D'après le théorème des probabilités totales :

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$= 0,4+0,6-0,3$$
$$P(A\cup B)=0,07$$

- Puisque

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B}) \quad \text{et} \quad B=(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)$$

$$\text{avec} \quad (A\cap B)\cap(A\cap\bar{B})=\varnothing$$
$$(A\cap B)\cap(\bar{A}\cap B)=\varnothing$$

On en déduit

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=0,4-0,3=0,1$$
$$P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0,6-0,3=0,3$$

Exercice 2

1 - La probabilité pour qu'un individu tiré au hasard au sein de la population soit atteint de la maladie M est estimée par la fréquence p de cette maladie au sein de la population soit :

$$P(M)=\frac{120}{1000}=0,12=p$$

2 - La probabilité que 5 sujets tirés au hasard dans la population soient indemnes de la maladie M s'exprime par :

$P(\bar{M}\cap\bar{M}\cap\bar{M}\cap\bar{M}\cap\bar{M})=$ **P** (5 non malades sur 5 sujets)

Si l'on suppose que le fait d'être atteint de M est indépendant d'un sujet à l'autre :

P [5 non malades sur 5 sujets] = $\left[P(\bar{M})\right]^5=(1-p)^5=(1-0,12)^5$

P [5 non malades sur 5 sujets] = 0,528

Exercice 3

Soient G = « naissance d'un garçon » et F = « naissance d'une fille »
Avec $\mathbf{P(G) = 0{,}51}$ et $\mathbf{P(F) = 1 - P(G) = 0{,}49}$

1 - Dans le cas où le couple désire avoir 3 filles et un garçon, celui étant le dernier de la fratrie la probabilité $\mathbf{P_1}$ que ce couple réalise son vœu est égale à :

$$\mathbf{P_1 = P(F \cap F \cap F \cap G) = P(F).P(F).P(F).P(G)}$$

On suppose que le sexe d'un enfant est indépendant de celui de l'enfant précédent :

$$\mathbf{P_1 = (0{,}49)^3 (0{,}51) = 0{,}06}$$

2 - Dans le cas où le couple désire 3 filles et un garçon, ce dernier occupant un rang quelconque dans la fratrie, la probabilité $\mathbf{P_2}$ que ce couple réalise son vœu est égale à :

$$\mathbf{P_2 = P(G \cap F \cap F \cap F) + P(F \cap G \cap F \cap F) + P(F \cap F \cap G \cap F) +}$$
$$\mathbf{P(F \cap F \cap F \cap G)}$$
$$\mathbf{= 4 . [P(F)]^3 . P(G)}$$
$$\mathbf{P_2 = 4(0{,}06) = 0{,}24}$$

Exercice 4

Soient C l'événement « toucher la cible » et $\mathbf{\bar{C}}$ l'événement contraire, on a pour chaque irradiation :

$$\mathbf{P(C) = 0{,}3 \quad \text{et} \quad P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0{,}7}$$

Les irradiations successives sont supposées indépendantes.
La probabilité de ne pas toucher la cible à la suite de n essais est donc égale à :

$$\mathbf{\underbrace{P(\bar{C} \cap \bar{C} \ldots \cap \bar{C})}_{n\ fois} = [P(\bar{C})]^n = (0{,}7)^n}$$

La probabilité de la toucher au moins une fois à la suite de n essais est donc égale à : $\mathbf{1 - (0{,}7)^n}$.

On cherche à déterminer n pour que cette probabilité soit au moins égale à 0,8 c'est-à-dire : $\mathbf{1 - (0{,}7)^n \geq 0{,}8}$ **soit** $\mathbf{(0{,}7)^n \leq 0{,}2}$

En utilisant les logarithmes, on obtient :

$$\mathbf{\log(0{,}7)^n \leq \log(0{,}2) \quad \text{soit} \quad n \log(0{,}7) \leq \log(0{,}2)}$$
$$\mathbf{-0{,}1549\, n \leq -0{,}6990 \quad \text{d'où} \quad n \geq 4{,}5}$$

Il faut donc au moins 5 essais

Exercice 5

1 - Puisque les événements « Maladie » noté M et « Exposition » noté E sont des événements dichotomiques, on a :

$$1-P(M/E)=P(\bar{M}/E) \quad \text{et} \quad 1-P(M/\bar{E})=P(\bar{M}/\bar{E})$$

d'où l'expression de OR

$$OR=\frac{P[M/E]}{P[\bar{M}/E]}\Bigg/\frac{P[M/\bar{E}]}{P[\bar{M}/\bar{E}]}=\frac{P[M/E]\,.\,P[\bar{M}/\bar{E}]}{P[\bar{M}/E]\,.\,P[M/\bar{E}]}$$

La définition de la probabilité conditionnelle d'un événement $\left[P(A/B)=P(A\cap B)/P(A)\right]$ et l'équivalence $P(A\cap B)=P(B\cap A)$ permettent d'écrire :

$$OR=\frac{P[M\cap E]\,.\,P[\bar{M}\cap\bar{E}]\,.\,P[\bar{M}]\,.\,P[M]}{P[M]\,.\,P[\bar{M}]\,.\,P[\bar{M}\cap E]\,.\,P[M\cap\bar{E}]}=\frac{P[E/M]\,.\,P[\bar{E}/\bar{M}]}{P[E/\bar{M}]\,.\,P[\bar{E}/M]}$$

Mais $\quad P[\bar{E}/M]=1-P[E/M]$ et $P[\bar{E}/\bar{M}]=1-P[E/\bar{M}]$

Donc $\quad OR=\dfrac{P[E/M]}{1-P[E/M]}\Bigg/\dfrac{P[E/\bar{M}]}{1-P[E/\bar{M}]}$

2 - A partir des définitions des deux quantités OR et RR, on peut écrire que :

$$RR=\frac{P[M/E]}{P[M/\bar{E}]}=OR\,.\,\frac{P[\bar{M}/E]}{P[\bar{M}/\bar{E}]}$$

Soit : $\quad RR=OR\,.\,\dfrac{1-P[M/E]}{1-P[M/\bar{E}]}$

Mais : $\quad 1-P[M/\bar{E}]=1-P[M/E]/RR$

D'où : $\quad RR\left[1-\dfrac{P[M/E]}{RR}\right]=OR\,.\left[1-P[M/E]\right]$

$$RR-P[M/E]=OR-OR\,.\,P[M/E]$$

Soit : $\quad RR=OR-(OR-1)\,.\,P[M/E]$

Exercice 6

Soient les événements **C** = « accouchement avec complications »
T = « accouchement à terme »

Les données du problème permettent d'écrire :