Chapitre 1
Le second degré

Une **fonction** est une relation qui, dans le cadre de ce programme, fait correspondre à chaque élément d'un ensemble défini, ici les nombres réels, un élément d'un autre ensemble défini, ici encore les nombres réels.
Un **polynôme de degré 2** est une somme d'expressions algébriques d'une même inconnue dont les puissances sont des entiers naturels allant jusqu'à deux 2.

Exemple
- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

On peut écrire $f(x)$ sous **différentes** formes : développée, factorisée, canonique. Chacune d'entre elles a un intérêt particulier.

Exemples
- $f(x) = 2x^2 + + 4x - 6$ (forme développée) ;
- $g(x) = 2(x - 1)(x + 3)$ (forme factorisée) ;
- $h(x) = 2(x+1)^2 - 8$ (forme canonique).

1. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

1.1 Vocabulaire et définitions

Le terme « **canonique** » signifie « correspondant à une norme », c'est-à-dire que l'écriture sous cette forme est l'objet d'un consensus compris de tous.

Exemples
- La fonction f_1 définie par l'écriture $f_1(x) = 2(x - 3)^2 + 5$ pour tout nombre réel x, est la forme canonique d'écriture de la fonction f_1.
- La fonction f_2 définie par l'écriture $f_2(x) = - 3{,}5(x + 2)^2 - \sqrt{7}$ pour tout nombre réel x, est la forme canonique d'écriture de la fonction f_2.

La forme canonique d'une fonction polynôme du second degré f est l'écriture sous la forme $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ où a, x_s et y_s désignent des nombres réels, a n'étant pas nul.

<u>**Remarques**</u>
1. Si a est nul, il n'y pas de terme du second degré.
2. Dans une telle écriture, le terme x n'apparaît qu'une seule fois dans une somme au carré.

3. Dans l'exemple $f_2(x) = -3{,}5(x+2)^2 - \sqrt{7}$, a est le réel négatif $-3{,}5$, x_s est le réel négatif -2 et y_s est le réel négatif $-\sqrt{7}$. Il apparaît ici des simplifications d'écriture acceptées, il faudrait écrire $f_2(x) = -3{,}5[x-(-2)]^2 + (-\sqrt{7})$.

■ **Exercice 1**

Parmi les fonctions polynômes définies par les écritures suivantes, lesquelles sont exprimées sous forme canonique du second degré ?

1) $f_1(x) = -5(x+2)(x+2) - 7$ 2) $f_2(x) = 3x^2 - 6$

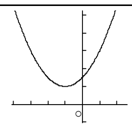
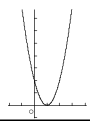
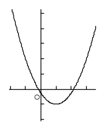
3) $f_3(x) = 2(3x-6)^2 + 1$ 4) $f_4(x) = -4x^2$.

■ **Exercice 2**

Soit la fonction f définie par $f(x) = -5(2x+8)^2 - 9$, effectuer les transformations nécessaire à l'obtention de la forme canonique.

1.2 Représentation graphique

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une parabole. L'intérêt de la forme canonique est de mettre en évidence des caractéristiques importantes de la parabole

	Parabole tournée vers le haut. Minimum y_s pour $x = x_s$.		
	Si $y_s > 0$, la parabole est au-dessus de l'axe des abscisses.		$f_1(x) = 0{,}5(x+1)^2 + 1$
$a > 0$	Si $y_s = 0$, la parabole est tangente à l'axe des abscisses.		$f_2(x) = 2(x-1)^2$
	Si $y_s < 0$, la parabole est sécante à l'axe des abscisses.		$f_3(x) = 0{,}75(x-1)^2 - 1$

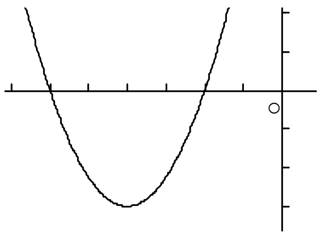
Remarques

1. Dans l'écriture $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$, l'utilisation des termes x_s et y_s sert à mettre en évidence que le sommet de la parabole a pour coordonnées (x_s, y_s).
2. Les courbes peuvent être tracées à l'aide de votre calculatrice ou en utilisant des logiciels comme Graphmatica http://www8.pair.com/ksoft/francais/install.html ou encore à partir de Geoplan ou Geogebra.

■ **Exercice 3**

Pour chacune des fonctions représentées précédemment, préciser les coordonnées du minimum.

■ **Exercice 4**



Déterminer la forme canonique de la fonction polynôme du second degré représentée ci-contre sachant que les coordonnées de son minimum sont entières ainsi que les abscisses de ses points d'intersection avec l'axe des abscisses.

■ **Exercice 5**

Rédiger un tableau du type du précédent tableau pour le cas $a < 0$.

1.3 Les autres expressions

a) **La forme développée ordonnée** : il s'agit d'une écriture définissant la fonction sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et a non nul. Cette écriture a pour avantage de mettre en évidence la valeur $f(0) = c$.

Rappel

Sous une telle forme d'écriture la fonction admet un extremum pour $x = -\dfrac{b}{2a}$, il est égal à $f(-\dfrac{b}{2a})$. C'est un maximum si $a < 0$ ou un minimum si $a > 0$. Cela correspond au sommet de la parabole représentative.

b) **La forme factorisée** : il s'agit (quand c'est possible) d'une écriture sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Cette écriture a pour avantage de mettre en évidence les points d'intersection de la courbe représentative avec l'axe des abscisses ou encore les valeurs x_1 et x_2 de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

<u>**Remarques**</u>

1. Il est aisé de passer de la forme canonique ou de la forme factorisée à la forme développée ordonnée. La réciproque n'est pas aussi immédiate.
2. Il n'est possible de passer de la forme canonique $f(x) = a(x + a')^2 + a''$ à la forme factorisée que si a et a'' sont de signes contraires. Il s'agit alors de mettre en évidence une différence de carrés pouvant se factoriser en produit d'une somme et d'une différence. Ainsi $f_1(x) = 0{,}5(x + 1)^2 + 1$ ne peut être factorisée car a et a'' sont du même signe positif ; $f_2(x)$ est factorisée et $f_3(x) = 0{,}75(x - 1)^2 - 1 = 0{,}75[(x - 1)^2 - \dfrac{1}{0{,}75}] = 0{,}75[(x - 1)^2 - (\sqrt{\dfrac{1}{0{,}75}})^2] = 0{,}75(\mathrm{x} - 1 + \sqrt{\dfrac{1}{0{,}75}})(\mathrm{x} - 1 - \sqrt{\dfrac{1}{0{,}75}})$ ce qui peut encore être écrit $f_3(x) = 0{,}75(\mathrm{x} - 1 + \sqrt{\dfrac{4}{3}})(\mathrm{x} - 1 - \sqrt{\dfrac{4}{3}})$.

■ **Exercice 6**

Donner les expressions développées ordonnées des fonctions f_1, f_2 et f_3 données dans le tableau de la partie 1.2

■ **Exercice 7**

1) Déterminer la forme factorisée puis la forme développée ordonnée de la fonction représentée dans l'exercice 4.
2) Mêmes questions, quand c'est possible, pour les fonctions g et h définies respectivement par $g(x) = -7(x+3)^2 + 5$ et pour $h(x) = -3(x-2)^2 - 5$.

2. Équation du second degré, discriminant

Une équation du second degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ou encore $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ou $a(x - x_s)^2 + y_s = 0$, a n'étant pas nul.

Résoudre une équation du second degré dans l'ensemble des réels, c'est trouver, si elles existent, les valeurs de x appelées solutions pour lesquelles la valeur du polynôme est égale à 0.

a) Forme factorisée : $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, les solutions sont évidentes, ce sont x_1 et x_2.

Exemple

- L'équation $2(x - 5)(x + 3) = 0$ a pour solutions 5 et – 3.

b) Forme canonique : $a(x - x_s)^2 + y_s = 0$.

- Si a et y_s sont du même signe, il n'y a pas de solution. Comme $(x - x_s)^2$ est positif, les expressions $a(x - x_s)^2$ et y_s sont du même signe ainsi que leur somme.
- Si $y_s = 0$, alors $a(x - x_s)^2 = 0$ ou $a(x - x_s)(x - x_s) = 0$ et il y a deux solutions identiques (solution double) x_s.
- Si a et y_s sont de signes contraires, on transforme l'expression en une forme factorisée, ce qui nous ramène au cas précédent.

Exemples

- $-3(x - 2)^2 - 7 = 0$, ici $a = -3$ et $y_s = -7$, ils sont du même signe. On peut en déduire qu'il n'y a pas de solution.
- $2(x + 6)^2 = 0$, solution double – 6.
- $-3(x - 2)^2 + 7 = 0$, ici $a = -3$ et $y_s = 7$, ils sont de signes contraires. On factorise par différence de deux carrés : $-3(x-2)^2 + 7 = -3[(x-2)^2 - \frac{7}{3}] = -3[(x-2)^2 - \left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2] = -3(x - 2 + \sqrt{\frac{7}{3}})(x - 2 - \sqrt{\frac{7}{3}})$. Les solutions sont $2 - \sqrt{\frac{7}{3}}$ et $2 + \sqrt{\frac{7}{3}}$.

c) Forme développée ordonnée : $ax^2 + bx + c = 0$, deux cas particuliers et le cas général.

- Si $b = 0$, on doit résoudre $ax^2 + c = 0$, c'est une situation correspondant à la forme canonique, si a et c de même signe, pas de solution et si a et c de signes contraires, on factorise par différence de deux carré et cela donne les solutions opposées $\sqrt{-\frac{c}{a}}$

et $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$; si on a $c = 0$ alors $ax^2 + bx = 0$ soit $x(ax + b) = 0$ qui se résout simplement, donnant pour solutions 0 et $-\frac{b}{a}$.

- Dans le cas général, il faut calculer le **discriminant** $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$

Si $\Delta < 0$	Pas de solution
Si $\Delta = 0$	Solution double $\frac{-b}{2a}$
Si $\Delta > 0$	Deux solutions distinctes $\frac{-b+\sqrt{\delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\delta}}{2a}$

Exemples

- $2x^2 + 3 = 0$, a et c sont du même signe donc pas de solution.
- $2x^2 - 3 = 0$, a et c sont de signes contraires donc deux solutions : $2x^2 - 3 = 2(x^2 - \frac{3}{2})$ $= 2(x^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2) = 2(x - \sqrt{\frac{3}{2}})(x + \sqrt{\frac{3}{2}})$. Les solutions sont $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, elles correspondent bien à $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ et $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- $-3x^2 + 5x = 0$ qui peut s'écrire $x(-3x + 5) = 0$ dont les solutions sont 0 et $-\frac{5}{-3}$ soit 0 et $\frac{5}{3}$.
- $-4x^2 + 5x + 7 = 0$: comme il n'y a rien de remarquable, on calcule de discriminant. On a $\Delta = 5^2 - 4(-4) \times 7 = 137$. Le discriminant est positif, il y a deux racines distinctes (on désigne par « racines » les solutions de l'équation) $\frac{-5+\sqrt{137}}{2(-4)}$ qui s'écrit aussi $\frac{5-\sqrt{137}}{8}$, l'autre racine étant $\frac{5+\sqrt{137}}{8}$.

Algorithme qui affiche les racines éventuelles d'un polynôme du second degré écrit sous forme développée

On demande *a*, *b* et *c* (*a* doit être différent de 0)
$d = b^2 - 4ac$

Si $d > 0$ **alors**

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

On affiche r_1 et r_2

Sinon

si $d = 0$ **alors** $r_0 = \dfrac{-b}{2a}$

On affiche r_0

Sinon on affiche « pas de racines »

Finsi

Finsi

Fin

On peut programmer cet algorithme avec Scilab :
Scilab est un logiciel gratuit, vous pourrez le télécharger à l'adresse suivante : http://www.scilab.org/download. Une fois Scilab chargé, il faut rajouter le module lycée : dans la barre de menus cliquer sur Applications>Gestionnaire de modules-ATOMS, puis cliquer sur Module lycée, puis sur installer

1. On écrit le programme dans l'éditeur :

```
//programme qui affiche les racines d'un polynôme ax2 + bx + c
a = input "a =" ; //(avec a différent de 0)
b = input "b =" ;
c = input "c =" ;
//calcul de delta ;
d = b*b – 4*a*c ;
//affichage des racines éventuelles ;
if d > 0 then
   r1 = (– b + sqrt(d))/2*a ;
   r2 = (– b – sqrt(d))/2*a ;
   afficher ("les racines sont : " +string(r1)+ "et" +string(r2))
elseif d=0 then
   r0 = (– b /2*a) ;
   afficher ("la racine double est : "+string(r0)) ;
else
   afficher ("il n'y a pas de racine ") ;
end
```

2. On enregistre le programme.
3. On l'exécute : dans la console faire Fichier / Exécuter

Remarque
Les résultats obtenus sont des valeurs approchées quand les résultats sont des irrationnels ou des décimaux ayant un nombre élevé de chiffres après la virgule.

Remarques
1. Si le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'est pas négatif, alors la somme des racines est $S = -\dfrac{b}{a}$ et leur produit est $P = \dfrac{c}{a}$.
2. Si deux nombres sont connus par leur somme S et leur produit P, alors ils sont solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

■ **Exercice 8**
Les fondateurs de l'algèbre sont les mathématiciens de langue arabe du IX^e siècle. L'ouvrage de l'un d'entre eux, **Muhammad Al Khwarizmi** (aux alentours de 780-850)

nous est parvenu sous le titre *Al-Mukhtasar fī hisab al-jabr wal-Muqābala* **L'abrégé du calcul par la restauration et la comparaison.** Le terme *al-jabr* qui a donné « algèbre » signifie reboutement ou restauration : on ajoute à chaque membre des termes égaux à ceux qui sont retranchés. Nous nous proposons de travailler sur l'extrait suivant :

> ***Un bien et des racines égalent un nombre :*** *quant aux biens et aux racines qui égalent le nombre, c'est comme lorsque tu dis : un bien et dix de ses racines égale trente-neuf dirhams.*

Le terme « bien » est l'inconnue au carré il correspond au terme arabe utilisé *māl*, en notation actuelle c'est x^2, sa racine est donc x et « trente-neuf dirhams » correspond à la constante 39.

1) Écrire quelle équation il s'agit de résoudre

> *Il y a une autre figure qui mène également à cela et c'est : la surface (AB), étant le māl (il s'agit d'un carré de côté x de diagonale [AB]), nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous divisons par deux les dix, elles deviennent cinq, nous les transformons en deux surfaces sur les flancs de la surface (AB), et ce sont les deux surfaces (J), (N).*

2) Faire la construction indiquée
3) Rédiger sous forme algébrique les explications données ci-après.

> *La longueur de chacune des deux surfaces est cinq coudées (la coudée est l'unité de longueur) - et c'est la moitié des dix racines - et sa largeur est comme le côté de la surface (AB). Il nous reste alors un carré dans l'angle de la surface (AB), et c'est cinq par cinq, et c'est la moitié des dix racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface. Or nous savons que la première surface est le bien et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont dix racines. Tout cela est donc trente neuf, et il reste pour compléter la surface la plus grande, un carré de cinq par cinq, et c'est vingt-cinq. Nous l'ajoutons à trente neuf afin que se complète la surface la plus grande, et c'est la surface (DE). Tout cela vaudra soixante-quatre. Nous prenons sa racine, et c'est huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si nous lui retranchons l'équivalent de ce que nous lui avons ajouté -et c'est cinq- il reste trois, et c'est le côté de la surface (AB) qui est le bien, et c'est sa racine; et le bien est neuf.*

Traduction Ahmed Jebbar

4) Comme il s'agissait de quantités, uns seule solution, positive est trouvée. Compléter la rédaction pour résoudre complètement l'équation.

■ Exercice 9

Résoudre les équations suivantes :

1) $-3x^2+4=0$	2) $5x^2=-7$	3) $-2x^2+5x=0$
4) $3x^2+4x-7=0$	5) $-4x^2+24x-36=0$	6) $7x^2+4x+1=0$

■ Exercice 10

Une équation de la forme $ax^4+bx^2+c=0$ est appelée « équation bicarrée », l'inconnue n'y apparaît qu'aux puissances quatre et deux.

On considère l'équation $2x^4-3x^2-2=0$:

1) On pose $x^2=X$. Après avoir précisé la caractéristique de X, écrire l'équation obtenue par substitution de X à x^2.

2) Résoudre la nouvelle équation obtenue puis en déduire les solutions de l'équation initiale.

■ Exercice 11

Jérôme Cardan (Ieronimo Cardano Pavie 1501-Rome 1576) était entre autres médecin et mathématicien. Il a écrit de très nombreux ouvrages dont l'*Ars Magna* (Le Grand Art 1545) qui contient toutes les connaissances algébriques de son époque. Voici l'un des problèmes résolus qui apparaît dans son ouvrage rédigé en latin :

> *Un homme est allé trois fois au marché. La première fois il a rapporté deux fois la somme qu'il avait emportée avec lui. Lors du second voyage, il a pris ce double montant et est revenu avec la même, chose plus sa racine carrée et deux aurei* (l'aureius, pluriel aurei, est une unité monétaire antique romaine valant 100 sesterces) *en plus. Il a gardé tout ceci et est retourné avec au marché une troisième fois. Le résultat de ce voyage a été le carré de ce qu'il avait pris sur lui plus quatre aurei. En outre, on sait qu'il est revenu avec 360 aurei. En conséquence, je veux savoir combien il avait sur lui pour son premier voyage.*

1) On désigne par X la somme que l'homme avait en partant pour la troisième fois au marché. Déterminer cette somme.
2) On désigne par x la somme que l'homme avait en partant pour son deuxième voyage. Déterminer cette somme.
3) Répondre à la question posée par Cardan.

■ Exercice 12

On considère la parabole (P) d'équation $y = 0{,}25(x - 3)^2 - 5$ et la droite (D) ayant pour équation $y = x - 9$.
1) Représenter (P) et (D).
2) Conjecturer ce qu'est $(P) \cap (D)$ et le confirmer par le calcul.

■ Exercice 13

Déterminer l'ensemble de définition (pour quelles valeurs réelles de x on peut calculer $f(x)$) de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x^2-5x+3}$

■ Exercice 14

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 1$. La résolution de l'équation $f(x) = 0$ donne deux solutions $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. La solution positive notée φ est appelée nombre d'or. Ce nombre connu dès l'antiquité grecque est désigné ainsi parce qu'il est supposé se trouver dans de nombreux rapports de dimensions d'objets de la nature ainsi que ceux de nombreuses constructions à l'esthétique appréciée. On pourrait calculer directement une valeur approchée de ce nombre à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul. Ces outils ne sont pas des outils magiques, les fabricants les ont créés en y intégrant des méthodes de calcul par approximations dont ils ne communiquent pas la teneur. Nous nous proposons ici de