1 Équations du second degré Signe du trinôme

résumés de cours

exercices

contrôles

corrigés

RAPPEL : ÉQUATIONS ; INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

L'équation $ax + b = 0$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ a pour solution $x = -\frac{b}{a}$.

Le signe de $ax + b$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
signe de $ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Pour résoudre des inéquations, il faut se rappeler les deux règles suivantes :
On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre réel **strictement positif** sans changer le sens de l'inégalité.
Il faut changer le sens d'une inégalité si on multiplie ou divise cette inégalité par un même nombre réel **strictement négatif.**

ÉQUATIONS ; INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

On utilise souvent la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

f(x) peut aussi se mettre sous la ***forme canonique*** :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le ***discriminant*** de l'équation $f(x) = 0$.
Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution (ou racine).

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution (ou racine) double $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions (ou racines) distinctes :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Le signe du « trinôme du second degré » ou polynôme du second degré est donné par la règle suivante :
si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x ;

si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$ qui l'annule ;

si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour les valeurs de x à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ pour les valeurs de x à l'intérieur des racines.
On peut résumer ces derniers résultats dans un tableau :
si $\Delta > 0$ et si $x' < x''$:

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Dans le cas où le trinôme du second degré admet deux solutions, on peut écrire la factorisation suivante : $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$.

Tableaux de variation de f

si $a > 0$

x		α	
f(x)	$\searrow$	β	$\nearrow$

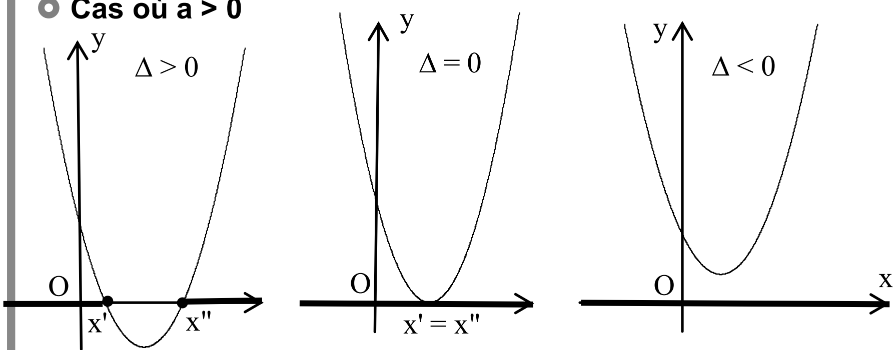
si $a < 0$

x		α	
f(x)	$\nearrow$	β	$\searrow$

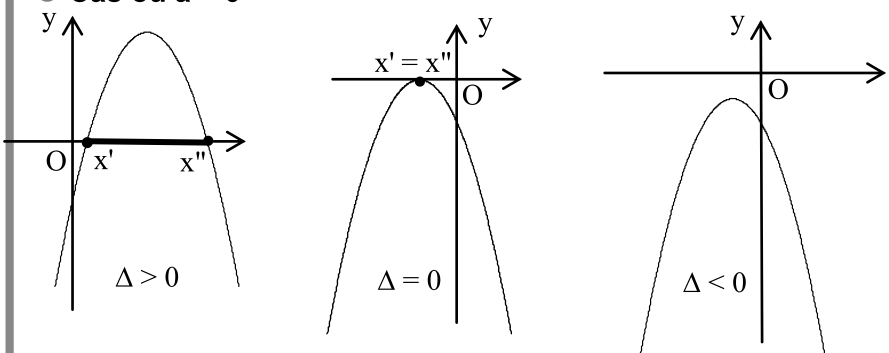
Interprétation graphique du signe de $ax^2 + bx + c$

La courbe représentative du trinôme du second degré est une parabole.
$ax^2 + bx + c \geq 0$ admet pour solutions les abscisses des points de la parabole situés sur et au-dessus de l'axe des abscisses (voir les figures ci-dessous).
On a dessiné en gras la partie de l'axe des abscisses où $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Cas où a > 0



Cas où a < 0



Un même raisonnement permet de déterminer graphiquement les solutions de l'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$. Celle-ci a pour solutions les abscisses des points de la parabole situés strictement en dessous de l'axe des abscisses.
À l'exercice 10, on a indiqué un algorithme de résolution de l'équation du second degré et du signe du trinôme du second degré ainsi qu'une programmation sur Algobox.

✷ Exercice 1 — 15 min

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$\frac{5x}{3} - \frac{1-2x}{5} = x + \frac{3}{5} - \frac{x-2}{3}$; $4x^2 - 9 = 0$; $3x^2 + 6x = 0$;
$x^2 - 15x + 14 = 0$; $4x^2 - 12x + 9 = 0$; $x^2 - 6x + 8 = 0$.

✷ Exercice 2 — 30 min

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$-x^2 + 6x - 4 = 0$; $3x^2 + 18x + 27 = 0$; $4x^2 - 5x + 7 = 0$;
$\frac{2-x}{3x} - \frac{2x+3}{5} + \frac{x}{3} = 0$; $x^4 + 6x^2 - 7 = 0$;
$\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right) + 4 = 0$.

✷ Exercice 3 — 35 min

1. Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ les inéquations :
a) $\frac{x-3}{5} - \frac{2+x}{3} < 2x - \frac{1}{3}$;
b) $-5x^2 + 25x - 20 \geq 0$;
c) $x^2 - 9 \geq 0$;
d) $2x^2 + 8x + 8 < 0$;
e) $x^2 + 6x + 9 > 0$.
2. Retrouver graphiquement les résultats des inéquations des questions 1. b) et 1. c).

✷✷ Exercice 4 — 35 min

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$x^2 - 7x + 12 < 0$; $-2x^2 + 10x - 8 \leq 0$; $5x^2 + 7x - 12 < 0$;

$x^2 + 10x + 25 \geq 0$; $\dfrac{2x + 5}{1 - x} \leq 0$; $\dfrac{16}{x} < x$; $x^4 - x^2 - 6 > 0$.

✷ Exercice 5 — 30 min

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + x + 6$.

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f.

2. On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) avec les axes du repère.

3. Tracer la courbe (C) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unités, 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

4. Tracer la droite (D) d'équation $y = -2x + 8$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, par le calcul puis graphiquement :

$$f(x) = -2x + 8 \text{ puis } f(x) \leq -2x + 8.$$

✷ Exercice 6 — 10 min

On considère un trapèze isocèle ABCD, de bases [AB] et [CD] telles que :
AB = 5 cm ; CD = 7 cm et de hauteur AH = 6 cm.
Si on diminue les trois longueurs AB, CD et AH de x cm, l'aire du trapèze diminue de 20 cm^2.

1. À quel intervalle x appartient-il ?

2. Déterminer x.

On rappelle l'aire d'un trapèze : $\dfrac{(B+b)h}{2}$

✷ Exercice 7 — 15 min

1. Trouver les dimensions d'un rectangle de périmètre 44 cm et d'aire 105 cm^2.

2. Trouver deux entiers relatifs dont la somme est 17 et le produit –200.

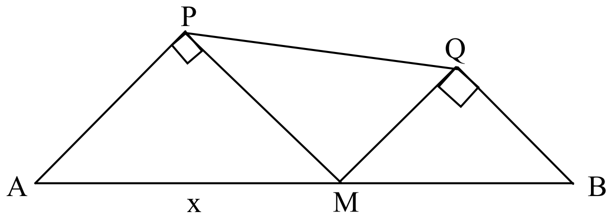
✷ Exercice 8 — 15 min

Déterminer les réels x et y solutions du système :

$$\begin{cases} 2(x-1)^2 - 3(y+3)^2 = -4 \\ 5(x-1)^2 + (y+3)^2 = 7 \end{cases}$$

✱✱	**Exercice 9**	20 min

[AB] est un segment de 10 centimètres de longueur. M est un point de [AB] distinct de A et B. AMP et BMQ sont des triangles rectangles et isocèles. On cherche à déterminer la position du point M pour que la distance PQ soit minimale. On pose AM = x.



1.
a) À quel intervalle x appartient-il ?
b) Exprimer PM^2 puis MQ^2 en fonction de x.
c) En déduire que $PQ^2 = x^2 - 10x + 50$.

2.
a) Après en avoir dressé un tableau de variation, représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la fonction f définie sur]0 ; 10[par :

$$f(x) = x^2 - 10x + 50.$$

On pourra prendre 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5 unités sur l'axe des ordonnées.

b) En déduire la position du point M rendant la distance PQ minimale.
c) Placer les points P et Q dans ce cas. Quelle est la nature du quadrilatère ABQP ?

3.
a) Déterminer graphiquement les valeurs α et β de x telles que PQ = 6. On donnera un encadrement d'amplitude 1 de α et β.
b) Résoudre algébriquement PQ = 6.

✱✱	**Exercice 10**	10 min

Écrire un algorithme permettant de calculer les racines d'un polynôme du second degré, $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, puis l'implanter sur « Algobox ».

Contrôle

90 min — 20 points

Exercice 1 — 5 points

Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$:

$x^2 - 8x = 0$; $2x^2 - 7x + 5 = 0$; $-4x^2 + 2x + 12 = 0$;

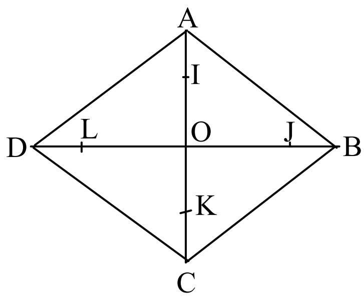
$-25x^2 + 30x - 9 \geq 0$; $-3x^2 + 7x - 2 < 0$.

Exercice 2 **3 points**

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$:

1. $3x^2 + 4x - 22 > 0$; **2.** $-x^2 + 10x \geq 0$.

Exercice 3 **12 points**



ABCD est un losange de côté 10 tel que AC = 12.
Les points I, J, K et L sont placés respectivement sur les segments [OA], [OB], [OC] et [OD] de telle sorte que : AI = BJ = CK = DL = x.

1. Déterminer l'aire du losange ABCD.
2. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?
3. On désigne par A(x) l'aire du quadrilatère IJKL.
a) À quel intervalle x appartient-il ?
b) Montrer que $A(x) = 2x^2 - 28x + 96$.
4.
a) Pour quelles valeurs de x, l'aire A(x) est-elle égale à la moitié de celle du losange ABCD ?
b) L'aire A(x) peut-elle être égale au quart de celle du losange ABCD ?
5. Pour quelles valeurs de x l'aire A(x) est-elle comprise entre 80 et 90 ?

Corrigés des exercices

Exercice 1

Pour chacun des exercices, on essaiera d'utiliser la méthode la plus courte.

- $\dfrac{5x}{3} - \dfrac{1-2x}{5} = x + \dfrac{3}{5} - \dfrac{x-2}{3}$.

On réduit les deux membres au même dénominateur 15 et on se rappelle qu'un trait de fraction se comporte comme des parenthèses :

$$\frac{25x - 3(1-2x)}{15} = \frac{15x + 9 - 5(x-2)}{15} \Leftrightarrow 25x - 3 + 6x = 15x + 9 - 5x + 10$$

$$31x - 10x = 19 + 3 \Leftrightarrow 21x = 22 \Leftrightarrow x = \frac{22}{21}.$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{22}{21}\right\}}$$

- $4x^2 - 9 = 0$.

On reconnaît une différence de deux carrés :
$(2x + 3)(2x - 3) = 0$.
Un produit de facteurs s'annule si et seulement si l'un au moins des facteurs s'annule : $2x + 3 = 0$ ou $2x - 3 = 0$.

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right\}}$$

- $3x^2 + 6x = 0$.

On remarque le facteur commun $3x$, on peut factoriser :
$3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ ou $x + 2 = 0$.

$$\boxed{S = \{0 ; -2\}}$$

- $x^2 - 15x + 14 = 0$.

Il s'agit d'une équation du second degré, on calcule son discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \times 1 \times 14 = 225 - 56 = 169 = 13^2$; $\sqrt{\Delta} = 13$.

$$x' = \frac{15-13}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad ; \quad x'' = \frac{15+13}{2} = \frac{28}{2} = 14.$$

$$\boxed{S = \{1 ; 14\}}$$

- $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

On reconnaît un carré parfait : $(2x - 3)^2 = 0$ soit $2x - 3 = 0$:

$$\boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

- $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Le discriminant de cette équation du second degré s'écrit :
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4 = 2^2$.

Les solutions de l'équation sont $x' = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $x'' = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

$$\boxed{S = \{2 ; 4\}}$$

Pour changer, dans une autre méthode, le coefficient de x étant pair, on peut utiliser le début d'un carré parfait :
$(x - 3)^2 - 9 + 8 = 0$ soit $(x - 3)^2 - 1 = 0$, on reconnaît une différence de deux carrés : $(x - 3)^2 - 1^2 = 0$;
$[(x - 3) + 1][(x - 3) - 1] = 0 \Leftrightarrow (x - 3 + 1)(x - 3 - 1) = 0$;

résumés de cours
exercices
contrôles
corrigés

$(x-2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ou $x-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=4$.

Exercice 2

• $-x^2+6x-4=0$.

$\Delta = 6^2-4(-1)(-4)=36-16=20=4\times 5$; $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{5}$

$x' = \dfrac{-6-2\sqrt{5}}{-2} = 3+\sqrt{5}$; $x'' = \dfrac{-6+2\sqrt{5}}{-2} = 3-\sqrt{5}$

$$\boxed{S=\left\{3-\sqrt{5}\ ;\ 3+\sqrt{5}\right\}}$$

• $3x^2+18x+27=0$.

On remarque que tous les coefficients sont des multiples de 3, on commence par simplifier cette équation : $x^2+6x+9=0$.

Il s'agit d'un carré parfait car on reconnaît la formule $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$:

$(x+3)^2=0$ soit $x=-3$.

$$\boxed{S=\{-3\}}$$

• $4x^2-5x+7=0$.

$\Delta=(-5)^2-4\times 4\times 7=25-112$; $\Delta<0$, l'équation n'admet pas de solution.

$$\boxed{S=\varnothing}$$

• $\dfrac{2-x}{3x}-\dfrac{2x+3}{5}+\dfrac{x}{3}=0$.

On ne peut diviser par zéro, il faut commencer par poser la condition $3x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 0$, ensuite on réduit tout au même dénominateur $15x$ que l'on pourra simplifier puisque $x \neq 0$:

$\dfrac{5(2-x)}{15x}-\dfrac{3x(2x+3)}{15x}+\dfrac{5x(x)}{15x}=0$ soit :

$10-5x-6x^2-9x+5x^2=0 \Leftrightarrow 0=x^2+14x-10$

$\Delta=14^2-4\times 1\times(-10)=196+40=236=4\times 59$.

$x'=\dfrac{-14-2\sqrt{59}}{2}=-7-\sqrt{59}$; $x''=\dfrac{-14+2\sqrt{59}}{2}=-7+\sqrt{59}$.

Ces solutions ne sont pas nulles donc conviennent.

$$\boxed{S=\left\{-7-\sqrt{59}\ ;\ -7+\sqrt{59}\right\}}$$

• $x^4+6x^2-7=0$.

Cette équation est du quatrième degré et x n'intervient que par son carré (*c'est une équation bicarrée)* on peut poser $X=x^2$:

$X^2+6X-7=0$

$\Delta=36-4\times(-7)=36+28=64=8^2$.