Chapitre 1

Dénombrement

1.1 Enoncés des exercices

Exercice 1
L'ancien système d'immatriculation français était le suivant : chaque plaque avait 4 chiffres, suivis de 2 lettres, puis des 2 numéros du département.
Les nouvelles plaques françaises sont formées de la façon suivante : elles comportent 2 lettres, puis 3 chiffres, puis 2 lettres.

1. Combien un département pouvait-il immatriculer de véhicules avec l'ancien système ?
2. Dans un département, combien y avait-il de plaques dont les 4 chiffres étaient différents ?
3. En supposant que la France a 96 départements, combien pouvait-on immatriculer de véhicules ?
4. Combien le nouveau système permet-il d'immatriculer de véhicules ?

Exercice 2
Une entreprise fabrique des stylos qui, sortis des chaînes, sont rangés par lots de 100 dans des cartons qui comportent tous 3 stylos défectueux parmi les 100. Le service qualité de l'usine choisit alors n stylos dans un carton pour vérifier s'il y a des stylos défectueux. Le but de l'exercice est de calculer la probabilité de découvrir au moins un stylo défectueux.

1. Donner le résultat.
2. Un étudiant a donné à cette question la réponse suivante :

Il y a $\binom{100}{n}$ *résultats possibles. Un résultat favorable est un tirage qui contient au moins un stylo défectueux, il y a* $\binom{3}{1}$ *façons de le choisir et* $\binom{99}{n-1}$ *façons de choisir les* $n-1$ *autres stylos. La probabilité cherchée est donc* $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{99}{n-1}}{\binom{100}{n}}$.

L'étudiant se trompe-t-il, et si oui en quoi ?

Exercice 3

On rappelle le principe du Loto : une série de 6 numéros, choisis au hasard parmi 49 nombres, est le tirage gagnant. On tire un autre nombre, différent des 6 premiers : c'est le numéro complémentaire.
Chaque joueur coche quant à lui 6 numéros, sans que l'ordre des 6 numéros cochés soit important. Ensuite, d'après le règlement de la Française des Jeux, on a :

- Les gagnants de 1$^{\text{er}}$ rang sont ceux dont les 6 numéros cochés sont les 6 bons numéros.
- Les gagnants de 2$^{\text{e}}$ rang sont ceux dont les 6 numéros cochés sont le complémentaire + 5 des 6 bons numéros.
- Les gagnants de 3$^{\text{e}}$ rang sont ceux dont les 6 numéros cochés comportent exactement 5 des 6 bons numéros.
- les gagnants de 5$^{\text{e}}$ rang sont ceux qui ont 4 des 6 bons numéros.

1. Quelle est la probabilité d'être un gagnant de premier rang ?
2. Quelle est la probabilité d'être un gagnant de 2$^{\text{e}}$ rang ?
3. Quelle est la probabilité d'être un gagnant de 3$^{\text{e}}$ rang ?
4. S'il est possible de faire une grille à 8 numéros, combien y a-t-il de grilles à 8 numéros cochés comportant exactement 4 bons numéros ?

Exercice 4

Un éditeur souhaite organiser son stand dans un salon. Il a 22 livres, 12 livres (différents) de maths et 10 livres (différents) de physique. Les livres seront rangés côte à côte, comme sur une étagère.

1. Combien y a-t-il de rangements possibles s'il souhaite ranger ses livres de façon à ce que les livres de maths soient groupés ensemble et les livres de physique ensemble ?
2. Combien y a-t-il de rangements possibles si la seule chose qui compte est que les livres de maths soient groupés ensemble ?

Exercice 5
On considère un groupe de n personnes.

1. Quelle est la probabilité que deux d'entre elles aient le même jour d'anniversaire, en supposant qu'il n'y a pas d'années bissextiles ?
2. Prendre $n = 30$ et calculer cette probabilité.

Exercice 6
Le Chevalier de Méré, adepte des jeux de hasard, posa un jour cette question à Pascal :

Quel est le plus probable : obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois de suite un dé, ou obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois de suite 2 dés ?

Que répondre au Chevalier de Méré ?

Exercice 7
Le Chevalier de Méré retourne voir Pascal. Voici le nouveau problème qu'il lui pose :

Deux joueurs jouent à un jeu de hasard en plusieurs parties : celui qui, le premier, gagne trois parties gagne le jeu et la totalité de la mise. Malheureusement, le jeu est interrompu alors que le premier a déjà gagné 2 parties, et le deuxième joueur 1 partie. Comment répartir équitablement la mise ?

Que répondre au Chevalier de Méré ?

Exercice 8
4 personnes participent à une course. Combien peut-il y avoir de classements possibles, en admettant qu'il puisse y avoir des ex-aequo ?

Exercice 9
On dispose d'un lot de n objets sortis d'une usine. Dans ce lot, m objets possèdent un défaut, les autres sont conformes.
On effectue un tirage sans remise de r objets dans le lot. Calculer la probabilité de tirer k objets défectueux dans un tel tirage :

1. Sans prendre en compte l'ordre dans lequel ont été tirés les objets.
2. En prenant en compte l'ordre dans lequel ont été tirés les objets.

Exercice 10

Un joueur de Poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité que sa main contienne :

1. Une seule paire ? (La main comporte seulement 2 cartes de même valeur et 3 autres de valeurs différentes.)
2. Deux paires ? (2 cartes de la même valeur, et 2 autres cartes d'une autre valeur, et une carte d'une troisième valeur.)
3. Un brelan ? (3 cartes de la même valeur, et 2 cartes ne formant pas une paire.)
4. Un carré ?

Exercice 11

Une entreprise de cosmétiques souhaite créer à l'intention de ses vendeurs un panier test de démonstration. L'entreprise a 4 gammes de produits :

- La gamme 1 qui comporte 7 produits.
- La gamme 2 qui comporte 3 produits.
- La gamme 3 qui comporte 5 produits.
- La gamme 4 qui comporte 4 produits.

Un panier est un ensemble de 4 boites, pour être valable, la i-ème boite du panier doit contenir un produit de la gamme i.

1. Combien y a-t-il de paniers valables possibles ?
2. Un employé peu scrupuleux constitue un panier en choisissant 4 produits différents au hasard dans le catalogue. Calculer, par 2 méthodes, la probabilité qu'il constitue un panier valable.
3. Le service qualité de l'usine, peu scrupuleux lui aussi, pour vérifier qu'un panier sortant de l'usine soit correct, regarde les 2 premiers produits et valide le panier si ces produits appartiennent bien à la gamme 1 et à la gamme 2. Quelle est la probabilité qu'un panier soit validé par erreur ?

Exercice 12

Une entreprise fabrique des mousquetons pour l'escalade. Pour être dans les normes internationales, les mousquetons doivent résister à certaines forces qui leur sont appliquées.

Une série de 100 prototypes de mousquetons, tous indépendants, sont soumis aux tests. On attend d'eux qu'ils résistent à une force de 22 kN. Il y a 4 issues lorsqu'on teste un mousqueton :

- Catégorie n°1 : il casse alors que la force est inférieure à 10 kN.
- Catégorie n°2 : il casse alors que la force est comprise entre 10 kN et 20 kN.
- Catégorie n°3 : il casse alors que la force est comprise entre 20 kN et 22 kN.
- Catégorie n°4 : il résiste à une force supérieure à 22 kN.

Si on considère un mousqueton, on notera C_i ="le mousqueton est dans la catégorie i".
On suppose que pour un mousqueton, on a : $P(C_1) = 0.1$, $P(C_2) = 0.1$, $P(C_3) = 0.5$, $P(C_4) = 0.3$.

1. Quelle est la probabilité que sur les 100 mousquetons, tous résistent à une force supérieure à 22kN ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement A= "sur la série de 100 mousquetons, 20 sont dans la catégorie 1, 30 dans la catégorie 2, 40 dans la catégorie 3 et le reste dans la catégorie 4" ?

Exercice 13
On considère les lettres du mot : "ANNIVERSAIRE".

1. Combien de mots peut-on former avec ces lettres ? (on ne se préoccupera pas du sens des mots formés.)
2. Combien de mots commençant et finissant par une voyelle peut-on former ?
3. Combien de mots peut-on former si on veut que toutes les voyelles soient groupées ensemble ?

Exercice 14
Robert fait ses affaires pour aller skier. Son armoire est remplie de 10 paires de gants. Il décide de prendre 4 gants, mais, étant dans la lune, il choisit les gants au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il tire :

1. Deux paires complètes ?
2. Au moins une paire ?
3. Une paire et une seule ?

Exercice 15
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements.

1. Démontrer la formule classique $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.
2. En déduire une formule similaire pour $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.
3. Démontrer par récurrence sur n la formule

$$P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

4. Application. Un groupe de n amis font une soirée ensemble et posent leur veste dans une chambre à leur arrivée. Au moment du départ, l'esprit plus très clair, on suppose qu'ils choisissent leur veste au hasard dans le tas. Quelle est la probabilité qu'au moins un étudiant ait récupéré sa propre veste ?
5. Vérifier le résultat obtenu.

Exercice 16

Le service après vente d'une entreprise possède 3 centres téléphoniques pour répondre aux clients. On suppose que n personnes, de façon indépendante, cherchent à joindre le SAV de cette entreprise et que leurs appels sont routés au hasard sur un centre.

1. Quelle est la probabilité que les n appels soient dirigés vers le même centre ?
2. On prend $n = 5$. Calculer, par 2 méthodes, la probabilité que les 3 centres reçoivent au moins un appel.
3. Généralisation : ici, n est quelconque. Calculer la probabilité que les 3 centres reçoivent au moins un appel.

Exercice 17

Après leur match historique à Wimbledon en 2010, les tennismen John Isner et Nicolas Mahut ont vu le sort les opposer à nouveau lors du 1^{er} tour en 2011. Le but est de calculer la probabilité de cet événement.

1. On suppose que le tirage au sort du 1er tour (64 matches pour 128 concurrents) s'effectue entièrement au hasard.
   (a) Combien y a-t-il de tableaux possibles du 1er tour, du point de vue du spectateur ? (Pour un spectateur, deux tableaux sont identiques si les matches proposés sont les mêmes !)
   (b) Combien y a-t-il de tableaux possibles au 1er tour, du point de vue de l'organisateur cette fois ? (Pour l'organisateur, l'ordre des matches est important, car il déterminera l'endroit où aura lieu le match ; l'intitulé de la rencontre est aussi important, un match Joueur 1-Joueur 2 n'est pas le même que Joueur 2-Joueur 1, pour des raisons de vestiaires par exemple.)
   (c) En déduire, par deux méthodes, la probabilité pour qu'il y ait un tableau opposant Isner et Mahut.
2. On suppose maintenant que parmi les 128 joueurs, il y a 32 têtes de série (les meilleurs joueurs) qui ne s'affrontent pas au 1^{er} tour. Ni Mahut, ni Isner, n'étant tête de série, quelle est la probabilité qu'ils s'affrontent ?

1.2 Correction des exercices

Correction de l'exercice 1

1. Il y a 10 choix pour chacun des chiffres, et 26 choix pour chacune des lettres. Par contre, le numéro du département n'est pas à choisir. Les choix se multiplient entre eux (structure d'arbre).
   Un département pouvait donc immatriculer $10^4 \times 26^2 = 6,76.10^6$ véhicules.
2. Il n'y a plus 10^4 chiffres possibles mais $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ possibilités pour les 4 chiffres.
   Il y avait donc $5040 \times 26^2 = 3407040$ plaques possibles avec les 4 premiers chiffres différents.
3. On pouvait donc immatriculer $96 \times 2,76.10^6 = 264,96.10^6$ véhicules.
4. Avec le nouveau système, on peut immatriculer $26^2 \times 10^3 \times 26^2 = 456,976.10^6$ véhicules.

Correction de l'exercice 2

1. L'expérience aléatoire consiste à choisir une partie à n éléments de l'ensemble des 100 stylos. Il y a donc $\binom{100}{n}$ résultats possibles.

   Un résultat favorable est une partie qui contient 1, 2 ou 3 stylos défectueux.
   – Il y a $\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{choix du stylo défectueux}} \times \underbrace{\binom{97}{n-1}}_{\text{choix des stylos fonctionnant}}$ parties avec un stylo défectueux.
   – Il y a $\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{choix des 2 stylos défectueux}} \times \underbrace{\binom{97}{n-2}}_{\text{choix des stylos fonctionnant}}$ parties avec deux stylos défectueux.
   – Il y a $\underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{choix des 3 stylos défectueux}} \times \underbrace{\binom{97}{n-3}}_{\text{choix des stylos fonctionnant}}$ parties avec trois stylos défectueux.

   Le nombre total de résultats favorables est donc la somme des résultats précédents, car ce sont des éventualités disjointes. En effet, il n'existe pas de partie contenant en même temps un stylo défectueux et deux stylos défectueux.

   La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{97}{n-1} + \binom{3}{2}\binom{97}{n-2} + \binom{3}{3}\binom{97}{n-3}}{\binom{100}{3}}.$$

Remarque :

On peut aussi utiliser l'événement contraire, on trouve alors $1 - \dfrac{\dbinom{97}{n}}{\dbinom{100}{n}}$.

2. La solution énoncée est fausse... parce qu'elle ne donne pas les mêmes résultats que la solution donnée ci-dessus ! (Prendre par exemple $n = 3$, on trouve que la probabilité est $\frac{14260}{161700}$, alors que l'étudiant trouve $\frac{14553}{161700}$.)

   Mais il est important, et pas si évident, de comprendre pourquoi l'étudiant se trompe.

   En fait, avec sa technique, l'étudiant compte certains "tirages" plusieurs fois. Prenons un exemple pour bien comprendre. Avec $n = 3$, notons D_1, D_2, D_3 les 3 stylos défectueux et $C_1, C_2, \ldots, C_{97}$ les stylos corrects. L'étudiant compte les tirages favorables en imaginant un choix à 2 étapes (un arbre) : lors de la première étape, il choisit un stylo défectueux, puis ensuite un ensemble de 2 autres stylos quelconques choisis parmi les 99 stylos restants.

   Avec cette technique, le tirage $\{D_1, D_2, C_1\}$, par exemple, est compté 2 fois :
   – lorsque le stylo défectueux choisi est D_1, et lorsque ensuite les deux autres stylos sont $\{D_2, C_1\}$.
   – Une autre fois, lorsque le stylo défectueux choisi est D_2, et lorsque ensuite les deux autres stylos sont $\{D_1, C_1\}$.

   Néanmoins, si l'étudiant se rend compte du problème, il peut retomber sur le bon résultat en retranchant à ce qu'il a obtenu (14553 tirages favorables) les tirages qu'il a comptés 2 fois (les tirages à 2 stylos défectueux, il y en a 291) et en retranchant 2 fois ceux qu'il a comptés 3 fois (les tirages avec 3 stylos défectueux, il y en a 1). Or $14553 - 291 - 2 = 14260$, le compte est bon !

Cet exercice met en évidence une erreur classique en dénombrement, assez pernicieuse : compter plusieurs fois un même objet.

Correction de l'exercice 3

1. Calculons d'abord le nombre de grilles pouvant être cochées par le joueur : il choisit 6 numéros par hasard, l'ordre étant indifférent. Il y a donc $\dbinom{49}{6}$ grilles possibles.
   Par ailleurs, il n'y a qu'une seule grille de 6 numéros formée par les numéros gagnants. La probabilité cherchée est donc $\dfrac{1}{\dbinom{49}{6}}$. Soit une chance sur 13983816...