Jour n°1

Exercice 1.1

Soit n un entier naturel non nul. Un jardinier plante n bulbes de tulipes dans son jardin. Chaque bulbe a une probabilité $p \in]0,1[$ de donner une fleur. Lorsqu'une tulipe fleurit une année, elle refleurit toutes les années suivantes. En revanche, si un bulbe n'a pas donné de fleur une année il a toujours une probabilité p de donner une fleur l'année suivante. On suppose de plus que les floraisons des différents bulbes sont indépendantes. On pose $q = 1 - p$.
On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé (Ω, A, P).
On appelle T la variable aléatoire réelle correspondant au nombre d'années nécessaires pour que tous les bulbes fleurissent.

1) Question de cours : loi géométrique, définition, propriétés.

2) Pour tout $h \in \{1, \dots, n\}$, on définit la variable aléatoire T_h égale au nombre d'années nécessaires pour que le $h^{\text{ième}}$ bulbe fleurisse.

a) Déterminer la loi de T_h.

b) Exprimer T en fonction de $T_1, T_2, \dots, T_n$. En déduire la loi de T.

3) a) Calculer

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k N (q^k)^N.$$

b) Calculer

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=1}^{N} (q^k)^{j-1}.$$

c) En déduire l'espérance $E(T)$ sous forme d'une somme.

Exercice 1.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Déterminer les endomorphismes f de E diagonalisables qui vérifient $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.

Énoncé

Soit n un entier naturel non nul. Un jardinier plante n bulbes de tulipes dans son jardin. Chaque bulbe a une probabilité $p \in]0,1[$ de donner une fleur. Lorsqu'une tulipe fleurit une année, elle refleurit toutes les années suivantes. En revanche, si un bulbe n'a pas donné de fleur une année il a toujours une probabilité p de donner une fleur l'année suivante. On suppose de plus que les floraisons des différents bulbes sont indépendantes. On pose $q = 1 - p$.
On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé (Ω, A, P).
On appelle T la variable aléatoire réelle correspondant au nombre d'années nécessaires pour que tous les bulbes fleurissent.

1) Question de cours : loi géométrique, définition, propriétés.

2) Pour tout $h \in \{1, \ldots, n\}$, on définit la variable aléatoire T_h égale au nombre d'années nécessaires pour que le $h^{ième}$ bulbe fleurisse.

a) Déterminer la loi de T_h.

b) Exprimer T en fonction de $T_1, T_2, \ldots, T_n$. En déduire la loi de T.

3) a) Calculer :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k N (q^k)^N.$$

b) Calculer :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=1}^{N} (q^k)^{j-1}.$$

c) En déduire l'espérance $E(T)$ sous forme d'une somme.

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice est assez classique mais il est perçu comme plutôt difficile en raison de la complexité des calculs de la troisième question.

1) C'est la définition de la loi qui est demandée. On doit donc donner le modèle général, puis donner les propriétés c'est-à-dire, la loi de probabilité en n'oubliant pas l'univers, l'espérance et la variance.
↪ Il faut bien connaître le cours de première année.

2) a) Il faut bien noter que h est fixé. T_h est alors un temps d'attente.
↪ Cette question ne doit pas poser de problème, sauf si on ne sait pas quelle loi modélise un temps d'attente.

b) La façon dont est posée la question suggère que l'expression de la variable T en fonction des variables T_i, ainsi que le calcul de la loi de T sont assez classiques. On procède alors selon la méthode étudiée en classe.
↪ Tout repose sur une bonne organisation des différentes étapes de calcul.

3) a) Il ne faut pas se laisser impressionner par l'apparente complexité de la formule. On remarque qu'il s'agit de calculer la limite d'une somme finie de termes. On peut donc commencer par calculer la limite d'un terme quelconque de la somme en n'oubliant pas que, dans ce cas, k est fixé et que c'est N qui tend vers $+\infty$.

↪ Il faut toujours réfléchir avant de se lancer dans des calculs.

b) Le principe est le même que pour la question précédente, la somme sur k est finie. La difficulté supplémentaire est le calcul du deuxième signe $\sum$, mais il doit sembler assez familier à quelques détails près.

↪ Il n'est pas rare d'utiliser plusieurs fois les mêmes méthodes.

c) Il s'agit d'un calcul d'espérance d'une variable aléatoire dont l'univers n'est pas fini. On va donc devoir faire attention à la convergence de la série même si l'énoncé laisse penser que cette espérance existe. D'autre part, puisqu'à la question précédente on a calculé la limite d'une somme partielle, on peut raisonnablement imaginer de procéder de la même manière. On va donc chercher le terme général de la série définissant l'espérance en gardant en mémoire la forme des résultats calculés au 3) b) puis on calculera la limite de la somme partielle.

↪ L'ordre des arguments est important. Toujours justifier la convergence avant de calculer la somme de la série.

Corrigé

1) On considère une épreuve aléatoire à deux issues, l'une appelée succès étant de probabilité p, l'autre appelée échec étant de probabilité $q = 1 - p$. On répète cette épreuve indéfiniment, de façon identique et de manière indépendante.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves effectuées pour obtenir un premier succès. On dira alors que X suit la loi géométrique de paramètre p. X est le temps d'attente du premier succès.

On obtient alors :

$$\boxed{\begin{gathered} X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \\ E(X) = \frac{1}{p}, \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}. \end{gathered}}$$

2) a) Pour tout entier h, T_h est le temps d'attente pour que le $h^{ième}$ bulbe fleurisse. On est dans les conditions énoncées à la question précédente. Puisque la probabilité pour qu'il fleurisse une année étant de p, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La variable } T_h \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p.}$$

b) Tous les bulbes fleurissent. Puisque, lorsqu'une tulipe fleurit une année elle refleurit l'année suivante, les bulbes seront tous fleuris lorsque le dernier aura fleuri. Il s'agit donc d'attendre jusqu'à ce que le dernier fleurisse. T représente donc le maximum de tous les T_h.

Ainsi :

$$\boxed{T = \max_{h\in[\![1,n]\!]}(T_h).}$$

On a alors :

$$\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

Soit $j \in \mathbb{N}^*$, on doit calculer $P(T = j)$.

Pour cela, on calcule, pour tout entier j, la probabilité $P(T \leq j)$.

Le maximum sera inférieur à j si et seulement si tous les résultats sont inférieurs à j, par conséquent, on obtient :

$$P(T \leq j) = P(\max\ [T_h \leq j]\ ) = P\left(\bigcap_{h=1}^{n}[T_h \leq j]\right).$$

Or, par hypothèse, les floraisons des bulbes sont indépendantes donc :

$$P\left(\bigcap_{h=1}^{n}[\ T_h \leq j\ ]\right) = \prod_{h=1}^{n} P(T_h \leq j).$$

D'où :

$$P(T \leq j) = \prod_{h=1}^{n} P(T_h \leq j).$$

Les variables T_h suivant toutes la même loi, on a alors :

$$P(T \leq j) = (P(T_h \leq j))^n\ ,$$

ce qui nécessite de calculer $P\ (T_h \leq j)$.

Puisque l'événement $(T_h > j)$ est égal à l'événement : « le nombre d'années nécessaires pour que le $h^{\text{ième}}$ bulbe fleurisse est supérieur à j » cela veut dire que les j premiers résultats ont été des échecs. Avec $q = 1 - p$, on obtient donc :

$$P(T_h > j) = q^j,$$

et donc :

$$P(T_h \leq j) = 1 - q^j.$$

Remarque : on aurait aussi pu calculer directement :

$$P(T_h \leq j) = \sum_{i=0}^{j} P(T_h = i)$$

mais c'est un peu plus long. De plus, le résultat $P(T_h > j) = q^j$ doit être connu.

On obtient alors pour tout entier j :

$$P(T \leq j) = (1 - q^j)^n.$$

De plus, on a :

$$P(T = j) = P(T \leq j) - P(T \leq j - 1).$$

Par conséquent, on a :

$$\boxed{P(T = j) = \left(1 - q^j\right)^n - \left(1 - q^{j-1}\right)^n.}$$

Remarque : lors de l'oral, il avait été demandé la justification de l'égalité :

$$P(T = j) = P(T \leq j) - P(T \leq j - 1).$$

On écrit alors :

$$P(T \leq j) - P(T \leq j - 1) = \sum_{i=1}^{j} P(T = i) - \sum_{i=1}^{j-1} P(T = i),$$

et on obtient le résultat par télescopage.

3) a) On sait que :

$$N\left(q^k\right)^N = Ne^{Nk\ln q} \text{ avec } 0 < q < 1.$$

Donc, puisque $\ln q < 0$, par croissance comparée, on a :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \lim_{N\to+\infty} N\left(q^k\right)^N = 0.$$

On sait que la limite d'une somme finie est égale à la somme des limites.

On obtient alors :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k N\left(q^k\right)^N = 0.}$$

b) On remarque que, puisque $q^k \neq 1$, l'on a :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{N} \left(q^k\right)^{j-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(q^k\right)^j = \frac{1 - q^{kN}}{1 - q^k}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{N} \left(q^k\right)^{j-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1 - q^{kN}}{1 - q^k}.$$

Et, puisque $0 < q < 1$, on a alors :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(q^k\right)^{j-1} = \frac{1}{1 - q^k}.$$

On obtient :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{N}\left(q^k\right)^{j-1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{1-q^k}.}$$

c) Par définition, l'espérance de la variable aléatoire T existe si et seulement si la série de terme général $jP(T=j)$ converge.

Or, on a :

$$P(T=j)=\left(1-q^j\right)^n-\left(1-q^{j-1}\right)^n.$$

Donc, à l'aide de la formule du binôme,

$$P(T=j)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(q^j\right)^k-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(q^{j-1}\right)^k.$$

De plus, on a :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad \left(q^j\right)^k-\left(q^{j-1}\right)^k=q^{k(j-1)}\left(q^k-1\right).$$

Et puisque les termes en $k=0$ se simplifient, on obtient donc :

$$jP(T=j)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k j\binom{n}{k}q^{k(j-1)}\left(q^k-1\right).$$

On reconnaît alors en $u_j=jq^{k(j-1)}$ le terme général d'une série géométrique dérivée. Par conséquent $jP(T=j)$ s'exprime comme combinaison linéaire de n termes généraux de séries géométriques dérivées qui sont par définition convergentes.
Donc $jP(T=j)$ est le terme général d'une série convergente.

Par conséquent, l'espérance $E(T)$ existe et sa valeur est la somme de la série. D'où :

$$E(T)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{N}jP(T=j).$$

Or, d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}jP(T=j)&=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}jq^{k(j-1)}(q^k-1).\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left(1-q^k\right)\sum_{j=1}^{N}j\,q^{k(j-1)}.\end{aligned}$$

On utilise alors la même méthode qu'au 3) b) en considérant que la limite d'une somme finie est égale à la somme des limites.

Puisque l'on a :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{N}j\,q^{k(j-1)}=\frac{1}{(1-q^k)^2},$$

on obtient donc :

$$\lim_{N\to+\infty}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left(1-q^k\right)\sum_{j=1}^{N} j\,q^{k(j-1)} = (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\,\frac{1}{1-q^k}.$$

En conclusion :

$$\boxed{E(T) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{1-q^k}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la définition et des résultats liés à la loi géométrique et en particulier qu'un temps d'attente correspond à une loi géométrique.

♡ Il faut se souvenir de l'ensemble des résultats concernant les séries géométriques et séries géométriques dérivées.

♡ Il faut se souvenir des techniques de calcul pour les lois de max ou d'inf.

♡ Il faut se souvenir du fait que dans le cas d'une somme finie, la limite de la somme est égale à la somme des limites.

♡ Il faut se souvenir de la formule du binôme de Newton.

♡ Il faut se souvenir de ne pas oublier de justifier de la convergence de la série avant de calculer l'espérance d'une variable aléatoire d'univers infini.

Formulaire

• On considère une épreuve aléatoire à deux issues, l'une appelée succès étant de probabilité p, l'autre appelée échec étant de probabilité $q = 1 - p$. On répète cette épreuve indéfiniment, de façon identique et de manière indépendante.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves effectuées pour obtenir un premier succès. On dira alors que X suit la loi géométrique de paramètre p, X est le temps d'attente du premier succès.

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \ , \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \ ,$$
$$E(X) = \frac{1}{p} \ , \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2} \ .$$

- A et B sont deux événements indépendants si et seulement si l'on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ et premier terme u_0 . La somme des $n + 1$ premiers termes est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

- On appelle série géométrique, toute série de terme général $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une telle série converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas on a :

$$\sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

- On appelle série géométrique dérivée, toute série de terme général $(nq^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Une telle série converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas on a :

$$\sum_{n\geq 1} nq^{n-1} = \frac{1}{(1 - q)^2}.$$

- <u>Formule du binôme de Newton</u>

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$