NOMBRES ENTIERS ET DÉCIMAUX

A- DÉFINITION

- L'ensemble $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
  $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.
  $\mathbb{Z} = \{ \ldots -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$.
- L'ensemble $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des décimaux.
  Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire comme le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10.
  La partie entière d'un nombre décimal est le nombre situé à gauche de la virgule et la partie décimale est le nombre situé à droite de la virgule.
- Un ensemble muni d'une étoile est cet ensemble privé de 0. Ainsi $\mathbb{Z}^*$ désigne l'ensemble des entiers relatifs sauf 0. On le note aussi $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

B- COMMENT NOMMER UN NOMBRE

- On le découpe en tranches de 3 chiffres à partir de la droite.

Milliards			Millions			Mille			Unités		
	1	3	8	3	6	1	2	4	5	3	7

Le nombre se lit : « Treize milliards huit cent trente-six millions cent vingt quatre mille cinq cent trente-sept ».

- Pour nommer un nombre décimal, on nomme d'abord la partie entière puis on lit la partie décimale à partir de la gauche.

Unités	Dixièmes	Centièmes	millièmes
2,	7	8	9

Le nombre $\underbrace{2}_{\text{Partie entière}},\underbrace{789}_{\text{Partie décimale}}$ se lit « deux *virgule* sept cent quatre-vingt neuf » ou « deux unités et sept cent quatre-vingt neuf millièmes ».

C- COMMENT COMPARER DEUX NOMBRES

Pour comparer deux nombres décimaux :

- on compare leurs parties entières ;
- si leurs parties entières sont égales alors on compare leurs chiffres des dixièmes ;
- si leurs chiffres des dixièmes sont égaux alors on compare leurs chiffres des centièmes ;
- et ainsi de suite jusqu'à ce que les deux nombres aient des chiffres différents.

LA MÉTHODE

Un marchand de légumes a vendu 62 kilos de tomates pour 77,50 euros.
Ces tomates lui ont coûté 80 euros les 100 kilos.
Quels sont les prix de vente et d'achat d'un kilo de tomates ?
Combien le marchand a-t-il gagné en vendant les 62 kilos ?

SOLUTION

$\boxed{1}$ **On détermine le prix de vente du kilo de tomates :**
Le marchand vend le kilo de tomates 1,25 euro car $77{,}50 \div 62 = 1{,}25$.

Pour cela, on a posé l'opération suivante :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 7 & 7, & 5 & 0 & 6\;2 \\
\cline{6-6}
- & 6 & 2 & & & 1,\;2\;5 \\
\cline{1-3}
 & 1 & 5 & 5 & & \\
- & 1 & 2 & 4 & & \\
\cline{1-4}
 & & 3 & 1 & 0 & \\
 & - & 3 & 1 & 0 & \\
\cline{2-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & 1, & 2 & 5 \\
- & 0, & 8 & 0 \\
\hline
 & 0, & 4 & 5
\end{array}
$$

$\boxed{2}$ **On détermine le prix de revient du kilo de tomates :**
Le marchand a payé 0,80 euro le kilo de tomates car $80 \div 100 = 0{,}80$.

$\boxed{3}$ **On détermine le bénéfice réalisé par kilo de tomates :**
Le marchand gagne 0,45 euro par kilo de tomates car $1{,}25 - 0{,}80 = 0{,}45$.
Le calcul est posé ci-dessus.

$\boxed{4}$ **On détermine enfin le bénéfice total :**
Le marchand a donc gagné $62 \times 0{,}45 = 27{,}90$ euros.

Pour cela, on a posé l'opération suivante :

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & & & 6 & 2 & \\
 & \times & 0, & 4 & 5 & \\
\cline{2-5}
 & & 3 & 1 & 0 & \leftarrow 62 \times 5 \\
+ & 2 & 4 & 8 & 0 & \leftarrow 62 \times 40 \\
\cline{2-5}
 & 2 & 7, & 9 & 0 &
\end{array}
$$

LES EXEMPLES

EXEMPLE 1

Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant :
6,53 ; 13,459 ; 6,504 ; 0,15 ; 6,5 ; 6,3 ; 2,5 ; 6,7 ; 6,03 ; 6,54 ; 6,71.

SOLUTION

On compare les parties entières. La plus petite est 0, puis 2, puis 6 et enfin 13. Dans l'ordre, on a donc 0,15 ; 2,5 ; les nombres qui commencent par 6 et 13,459.
Il suffit alors de classer les nombres de partie entière 6 :
6,53 ; 6,504 ; 6,5 ; 6,3 ; 6,7 ; 6,03 ; 6,54 et 6,71.
Pour les classer, on compare les chiffres des dixièmes, puis les chiffres des centièmes, etc (si nécessaire).
Ainsi le plus petit chiffre des dixièmes est 0, puis 3, puis 5, puis 6 et enfin 7.
6,53 ; 6,504 ; 6,5 ; 6,54 ont la même partie entière 6 et le même chiffre des dixièmes 5. Pour les classer, on compare les chiffres des centièmes et ainsi de suite. On a donc :
$0{,}15 < 2{,}5 < 6{,}03 < 6{,}3 < 6{,}5 < 6{,}504 < 6{,}53 < 6{,}54 < 6{,}7 < 6{,}71 < 13{,}459$.

⚠ Lorsque les nombres n'ont pas le même nombre de décimales, on rajoute des 0 à droite : ainsi 6,5 = 6,500.

EXEMPLE 2

Effectuer les opérations suivantes sans calculatrice :
$A = 324{,}57 + 35{,}46$; $B = 743{,}8 \times 0{,}26$; $C = 237{,}5 \div 38$.

SOLUTION

⚠ Revoir vos tables de multiplication avant de faire les calculs.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & 3 & 2 & 4, & 5 & 7 \\
+ & & & 3 & 5, & 4 & 6 \\
\hline
 & & 3 & 6 & 0, & 0 & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccl}
 & & & 7 & 4 & 3, & 8 & \\
 & \times & & & 0, & 2 & 6 & \\
\hline
 & & 4 & 4 & 6 & 2 & 8 & \rightarrow 7\,438 \times 6 \\
 & 1 & 4 & 8 & 7 & 6 & 0 & \rightarrow 7\,438 \times 20 \\
\hline
 & 1 & 9 & 3, & 3 & 8 & 8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
237{,}50 & 38 \\
\hline
-228\phantom{{,}50} & 6{,}25 \\
95 & \\
-76 & \\
190 & \\
-190 & \\
0 &
\end{array}$$

Pour positionner la virgule dans une multiplication, on compte le nombre total de chiffres dans les parties décimales. Ainsi il y a 1 chiffre dans 743,8 et 2 dans 0,26 soit 3 chiffres en tout. On place alors la virgule à 3 chiffres à partir de la droite.

On a donc : A = 360,03 ; B = 193,388 et C = 6,25.

VRAI-FAUX ET QCM

N° 1 **VRAI – FAUX** CORRIGÉ PAGE 140

Répondre par Vrai ou par Faux :

1)

a)	$\dfrac{7}{0{,}25} = 28$.	V	F
b)	$\dfrac{5{,}4}{100} = 0{,}54$.	V	F
c)	Diviser par 0,01 revient à multiplier par 100.	V	F
d)	Diviser par 10 revient à multiplier par 0,1.	V	F

2)

a)	$-4{,}31 < -4{,}59$.	V	F
b)	$3{,}05 > 3{,}4$.	V	F
c)	Dans 7,03 ; 3 est le chiffre des dixièmes.	V	F
d)	Le nombre entier le plus proche de 2,51 est 3.	V	F
e)	Le nombre entier le plus proche de – 5,72 est – 5.	V	F

N° 2 **QCM**

1) Compléter la multiplication suivante :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 3 & 5, & 7 & 5 \\
 & \times & & 2 & 3, & 6 \\
\hline
 & 2 & 1 & 4 & \boldsymbol{a} & 0 \\
1 & 0 & 7 & \boldsymbol{b} & 5 & \\
7 & 1 & 5 & 0 & & \\
\hline
8 & 4 & 3, & \boldsymbol{c} & 0 & 0
\end{array}$$

① $a = 5$, $b = 2$ et $c = 7$

② $a = 6$, $b = 7$ et $c = 6$

③ $a = 5$, $b = 2$ et $c = 4$

④ $a = 7$, $b = 8$ et $c = 9$

2) Diviser 4,9 par 0,07 revient à diviser :

① 49 par 7

② 49 par 70

③ 490 par 7

④ 490 par 700

3) Le nombre $A = (4{,}6 \times 5 + 7) \times 3 - 2$ est égal à :

① 163,6

② 88

③ 30

④ 55

LES EXERCICES

N° 1 LA COMPARAISON

CORRIGÉ PAGE 141

Compléter **…** par < ou > :

1. a) $-23{,}54$ **…** $-9{,}2$; **b)** $-0{,}812$ **…** $-0{,}813$; **c)** $432{,}37$ **…** $432{,}337$.
2. a) $-9{,}43$ **…** $-9{,}043$; **b)** $-2{,}503$ **…** $-2{,}504$; **c)** $31{,}271$ **…** $31{,}712$.
3. a) $35{,}27$ **…** $-35{,}29$; **b)** $-42{,}305$ **…** $-42{,}1$; **c)** $0{,}003\,4$ **…** $0{,}020\,3$.

N° 2 L'ordre

CORRIGÉ PAGE 141

1. Classer les nombres décimaux suivants par ordre décroissant :
32,385 ; 31,905 ; 1,87 ; 0,27 ; 31,807 ; 1,56 ; 31,81 ; 235,43 ; 31,9.
2. Classer les nombres décimaux suivants par ordre croissant :
– 1,01 ; – 1,001 ; – 1,1 ; – 10.01 ; – 10,011 ; – 1,11 ; – 1,111 ; – 1,101.

N° 3 L'ENCADREMENT

CORRIGÉ PAGE 141

Encadrer les nombres suivants par deux nombres entiers relatifs consécutifs :

1. a) $\ldots < 725{,}41 < \ldots$; **b)** $\ldots < -39{,}47 < \ldots$; **c)** $\ldots < 0{,}145 < \ldots$.

2. a) $\ldots < \dfrac{531}{10} < \ldots$; **b)** $\ldots < -\dfrac{241}{100} < \ldots$; **c)** $\ldots < \dfrac{19}{5} < \ldots$.

3. a) $\ldots < 4 + \dfrac{7}{10} < \ldots$; **b)** $\ldots < 12 - \dfrac{1}{100} < \ldots$; **c)** $\ldots < -4 + \dfrac{1}{4} < \ldots$.

N° 4 LA NUMÉRATION DE POSITION

CORRIGÉ PAGE 141

1. Effectuer le calcul 534×235 (sans calculatrice).
2. En déduire les résultats des calculs suivants :
$A = 5\,340 \times 23\,500$; $B = 53{,}4 \times 235$; $C = 0{,}534 \times 2{,}35$; $D = 0{,}005\,34 \times 0{,}235$.
$E = 12\,549 \div 235$; $F = 12{,}549 \div 534$; $G = 12\,549 \div 2{,}35$; $H = 125{,}49 \div 53{,}4$.

N° 5 LA DISTRIBUTIVITÉ

CORRIGÉ PAGE 141

1. Calculer de tête 40×60 ; 40×5 ; 3×60 ; 3×5.
2. En écrivant que $A = 43 \times 65 = (40 + 3)(60 + 5)$, calculer A.

N° 6 L'ÉGALITÉ

CORRIGÉ PAGE 141

Démontrer, sans effectuer les calculs, que : $39 \times 7\,575 = 75 \times 3\,939$.

N° 7 LES CALCULS PLUS SIMPLES

CORRIGÉ PAGE 142

Effectuer le plus simplement possible les calculs suivants :

1.	$A = 48 \times 99$	$B = 213 \times 101$	$C = 35 \times 39 + 35 \times 61$
2.	$A = 71 \times 69$	$B = 17{,}5 \times 44$	$C = 18{,}7 \times 21{,}5 - 18{,}7 \times 19{,}5$.

N° 8 LA DIVISION
CORRIGÉ PAGE 142

On a la division 2 280 ÷ 1A = 120. La lettre A remplace un chiffre. Lequel ?

N° 9 LES NOMBRES EN CHIFFRES
CORRIGÉ PAGE 142

Écrire en chiffres les nombres suivants :

1. Trente-trois milliards quatre cent dix millions dix-huit mille sept.

2. Quarante-sept unités cinquante-neuf millièmes.

N°10 LES NOMBRES EN LETTRES
CORRIGÉ PAGE 142

Écrire en lettres les nombres suivants :

3 182	2 000	3 000 400	351,75	3 480	600
9 390	200,4	2 145,243	0,351 7	32,57	0,039

N°11 LES CALCULS
CORRIGÉ PAGE 143

Effectuer les calculs suivants (sans calculatrice) :

1. **a)** $A = 38 + 17$; **b)** $B = 859{,}7 + 6\,875{,}39$; **c)** $C = 1\,234{,}128 + 765{,}872$.

2. **a)** $A = 25 - 63$; **b)** $B = 1\,234{,}56 - 432{,}6$; **c)** $C = 0{,}567\,34 - 31{,}562\,1$.

3. **a)** $A = 18 \times 13$; **b)** $B = 759{,}31 \times 0{,}645$; **c)** $C = 32{,}564 \times 11{,}255$.

4. **a)** $A = 125 \div 8$; **b)** $B = 104{,}65 \div 1{,}625$; **c)** $C = 114{,}555 \div 1{,}75$.

N°12 LES PRIORITÉS
CORRIGÉ PAGE 143

Effectuer si possible les calculs suivants (sans calculatrice) :

1. **a)** $A = 4 \times (-9) + (-3) \times 6$; **b)** $B = 27 - (-14) - 52 + 5$.

2. **a)** $A = 2[(-3 + 1) \times 5 + 9]$; **b)** $B = 3 - 4[2 - (5 - 11)]$.

3. **a)** $A = 5{,}2(12{,}5 - 6 \times 2{,}1)$; **b)** $B = (24 \times 2{,}5 + 1{,}3) - 4 + 2 \times 3$.

4. **a)** $A = [(-3 + 1)\times(5 + 9)] \div 0{,}5$; **b)** $B = 24 \div 6 \div 2$.

N°13 LA MÉNAGÈRE
CORRIGÉ PAGE 143

Une ménagère achète au marché pour 2,50 € de beurre, 3,75 € de légumes, 4,65 € de fruits, un poulet à 5,33 € et 1,80 € de salade.
Elle avait dans son porte-monnaie 20 €.
Combien lui reste-t-il après avoir fait ses achats ?

N°14 LE MOINS CHER
CORRIGÉ PAGE 143

Un même produit est vendu sous différents conditionnements :
A : paquet de 1 kg à 6,40 € ; B : paquet de 500 g à 3,30 € ; C : paquet de 200 g à 1,28 € ; D : paquet de 100 g à 0,90 € avec une promotion « un acheté, le deuxième à moitié prix ».
Quel est le conditionnement le plus avantageux pour l'achat d'un kilo ?

N°15 LE CHANGE
CORRIGÉ PAGE 143

Sachant que le dollar vaut 0,750 euro, alors compléter :

a) 180 dollars = **…** euros ; **b)** 2 025 euros = **…** dollars.

PUISSANCES - RACINES CARRÉES

Prérequis : les nombres réels, les opérations, et en particulier la multiplication.

A- PUISSANCES

1- DÉFINITION

Soit a un nombre réel et n un entier naturel : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ termes}}$ et $a^1 = a$.

2- FORMULAIRE

Soit a et b deux réels, n et m deux entiers naturels.

- ➪ $a^0 = 1$ si $a \neq 0$.
- ➪ $a^n \times a^m = a^{n+m}$.
- ➪ $(a^n)^m = a^{n \times m}$.
- ➪ $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ si $a \neq 0$.
- ➪ $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ si $a \neq 0$.
- ➪ $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.
- ➪ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ si $b \neq 0$.

B- RACINES CARRÉES

1- DÉFINITION

Soit A un nombre réel **positif ou nul**. **Le nombre positif ou nul** dont le carré est A s'appelle **la racine carrée** de A et se note $\sqrt{A}$.

$$\forall\, A \geq 0,\ \forall\, a \geq 0,\ \sqrt{A} = a \Leftrightarrow A = a^2.$$

2- FORMULAIRE

Soit A et B **deux réels positifs** ou nuls.

- ➪ $\sqrt{0} = 0$.
- ➪ $\sqrt{A \times B} = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$.
- ➪ $(\sqrt{A})^n = \sqrt{A^n}$.
- ➪ $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ si $A \geq 0$ et $B > 0$.

3- REMARQUES

Soit a un nombre réel quelconque.

- ➪ $\sqrt{a^2} = |a|$.
- ➪ $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$; $\sqrt{a^2} = -a$ si $a \leq 0$.

LA MÉTHODE

Écrire le nombre $A = \dfrac{7 \times 10^{-12} \times 6 \times (10^2)^3}{21 \times 10^{-4}}$ sous la forme d'une fraction irréductible, sous forme décimale puis en notation scientifique.

SOLUTION

1 **On regroupe les puissances de 10 avec les puissances de 10 et on simplifie.**

Pour cela on utilise les formules suivantes :

$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \times m}}$.

$$A = \frac{7 \times 10^{-12} \times 6 \times 10^{2 \times 3}}{21 \times 10^{-4}} = \frac{7 \times 10^{-12} \times 6 \times 10^{6}}{21 \times 10^{-4}};$$

$\boldsymbol{a^n \times a^m = a^{n+m}}$.

$$A = \frac{7 \times 2 \times 3 \times 10^{-12+6}}{3 \times 7 \times 10^{-4}} = \frac{\cancel{7} \times 2 \times \cancel{3} \times 10^{-6}}{\cancel{3} \times \cancel{7} \times 10^{-4}} = \frac{2 \times 10^{-6}}{10^{-4}};$$

$\boldsymbol{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \dfrac{1}{a^{m-n}}}$ **si** $\boldsymbol{a \neq 0}$.

$$A = \frac{2 \times 10^{-6}}{10^{-4}} = 2 \times 10^{-6-(-4)} = 2 \times 10^{-6+4} = 2 \times 10^{-2}.$$

2 **On donne les résultats sous les différentes formes :**

- sous forme décimale : $A = 2 \times 10^{-2} = 2 \times 0{,}01 = 0{,}02$;
- sous forme fractionnaire : $A = 2 \times 10^{-2} = \dfrac{2}{100} = \dfrac{1}{50}$;
- en écriture scientifique : $A = 2 \times 10^{-2}$.

Écrire un nombre sous forme scientifique c'est le mettre sous la forme $\boldsymbol{a \times 10^p}$ **avec** $\boldsymbol{1 \leq a < 10}$ **et** $\boldsymbol{p \in \mathbb{Z}}$.

Remarque :
Les formules sur les puissances sont à connaître par cœur.