Chapitre 1
ARITHMÉTIQUE

CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ LES PLUS USUELS	
Divisibilité par	
2	le chiffre des unités est : 0, 2, 4, 6 ou 8.
3	la somme des chiffres est divisible par 3.
4	le nombre formé par les deux chiffres de droite est divisible par 4.
5	le chiffre des unités est : 0 ou 5.
9	la somme des chiffres est divisible par 9.
10, 100, 1000, etc.	le nombre se termine respectivement par 0, 00, 000, etc.
11	la différence entre la somme des chiffres de rang pair et celle des chiffres de rang impair est divisible par 11.
25	le nombre se termine par 00, 25, 50 ou 75.

MÉTHODES

1. Comment utiliser la notion de multiple d'un entier naturel ?

2. Comment utiliser la division euclidienne ?

3. Comment établir la liste des diviseurs d'un entier non nul ?

4. Comment déterminer le PGCD de deux nombres entiers connaissant l'ensemble des diviseurs de chacun des deux nombres ?

5. Comment déterminer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme des soustractions ?

6. Comment déterminer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme des soustractions à l'aide d'un tableur ?

7. Comment déterminer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme d'Euclide ?

8. Comment déterminer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme d'Euclide à l'aide d'un tableur ?

9. Comment déterminer tous les diviseurs communs à deux nombres avec leur PGCD ?

10. Comment savoir si deux nombres entiers sont premiers entre eux ?

11. Comment déterminer la fraction irréductible égale à une fraction donnée ?

12. Comment résoudre un problème se ramenant au calcul du PGCD de deux nombres entiers ?

Méthode 1. Comment utiliser la notion de multiple d'un entier naturel ?

Pour utiliser la notion de multiple d'un entier naturel :
▲ on s'appuie sur la définition : *a et b étant deux entiers naturels et b non nul on dit que a est un multiple de b s'il existe un entier q tel que a = bq.*
Remarque : 0 est multiple de tous les nombres.

○ Exemples

1. 269 et 357 sont-ils des multiples de 17 ? Justifier.

$17\times15=255$ et $17\times16=272$ or $255<269<272$ donc $17\times15<269<17\times16$ et comme 15 et 16 sont deux entiers consécutifs, alors il n'existe pas d'entier q tel que $269=17q$ donc 269 n'est pas un multiple de 17.

$357=17\times21$ donc 357 est un multiple de 17.

2. Prouver qu'il existe un seul multiple de 117 compris entre 700 et 800.

Tout multiple de 117 s'écrit $117q$ où q est un nombre entier.
On a : $117\times5=585$; $117\times6=702$ et $117\times7=819$. ► On a écrit dans l'ordre croissant les multiples de 117 voisins de 700 et 800.
Or $585<700<702<800<919$.
Il existe donc un seul multiple de 117 compris entre 700 et 800 c'est : 702.

3. Démontrer que la somme de trois multiples consécutifs de 3 est un multiple de 9.

Trois multiples consécutifs de 3 s'écrivent :
$3(n-1)$, $3n$ et $3(n+1)$ où n désigne un entier naturel différent de 0
or $3(n-1)+3n+3(n+1)=3n-\cancel{3}+3n+3n+\cancel{3}=9n$.
La somme de trois multiples consécutifs de 3 peut donc s'écrire $9n$, produit de 9 par un entier.
La somme de trois multiples consécutifs de 3 est donc bien un multiple de 9.

○ Exercices*

1. 180 et 260 sont-ils des multiples de 15 ?

2 Trouver les multiples de 53 compris entre 300 et 500.

3. a. 36 et 42 sont-ils des multiples consécutifs de 6 ?
b. 42 et 56 sont-ils des multiples consécutifs de 7 ?

4. On donne un nombre entier n. Donner deux multiples consécutifs de n.

5. Démontrer que la somme de trois multiples consécutifs de 5 est un multiple de 15.

** Pour les exercices complémentaires, se reporter page 571*

Méthode 2. Comment utiliser la division euclidienne ?

Pour utiliser la division euclidienne : ▲ on s'appuie sur sa définition : *a et b étant deux entiers naturels et b non nul, effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que a = bq + r et r < b.* *a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.*

○ Exemples

1. On effectue la division euclidienne d'un entier *a* par 6, on trouve 13 comme quotient.
a. Quels sont les restes possibles ? **b. Trouver toutes les valeurs de *a*.**

a. D'après la définition on a : $a = 6 \times 13 + r$ *et* $r < 6$. Le reste est strictement inférieur au diviseur 6 donc les restes possibles sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.
b. On calcule le dividende *a* pour les six restes possibles.
$r = 0$, alors $a = 6 \times 13$ d'où $a = 78$; $r = 1$, alors $a = 6 \times 13 + 1$ d'où $a = 79$;
$r = 2$, alors $a = 6 \times 13 + 2$ d'où $a = 80$; $r = 3$, alors $a = 6 \times 13 + 3$ d'où $a = 81$;
$r = 4$, alors $a = 6 \times 13 + 4$ d'où $a = 82$; $r = 5$, alors $a = 6 \times 13 + 5$ d'où $a = 83$.
Les valeurs de *a* sont 78, 79, 80, 81, 82 et 83.

2. Un fleuriste a acheté un lot de 200 roses. Combien de bouquets de 11 roses peut-il réaliser ?

On a : $200 = 11 \times 18 + 2$; on en déduit que le fleuriste peut réaliser 18 bouquets de 11 roses, il lui restera 2 roses.

○ Exercices*

1. On effectue la division euclidienne d'un entier *a* par 7, on trouve 23 comme quotient. a. Quels sont les restes possibles ? b. Trouver toutes les valeurs de *a*.

2. Dans un collège en rénovation, on a décidé de changer les tables de la cantine. Il y a deux cent soixante demi-pensionnaires et un seul service. Combien doit-on acheter de nouvelles tables de 8 ?

3. Dans une division euclidienne, le quotient est 19, le reste est 4 et le diviseur 6. Quel est le dividende ?

4. Quelles sont, parmi les égalités suivantes, celles qui traduisent une division euclidienne ? Si l'égalité convient, donner le dividende, le diviseur, le quotient et le reste. Sinon expliquer pourquoi l'égalité ne convient pas.
a. $291 = 18 \times 15 + 21$; b. $102 = 6 \times 16 + 6$; c. $142 = 8 \times 17 + 6$.

5. On distribue 52 cartes à jouer à trois personnes qui reçoivent chacune le même nombre de cartes. Combien de cartes recevra au maximum chaque personne ? Combien de cartes restera-t-il ?

---

* *Pour les exercices complémentaires, se reporter page 571*

Méthode 3. Comment établir la liste des diviseurs d'un entier non nul ?

Pour établir la liste des diviseurs d'un entier non nul :

▲ on commence la liste par 1 et on la termine par le nombre lui-même ;

▲ on cherche ensuite si 2 est un diviseur du nombre, si ce n'est pas le cas, on passe à 3, si c'est le cas on calcule le nombre qui multiplié par 2 donne le nombre choisi, ce second facteur est aussi un diviseur ;

▲ on cherche si 3 est un diviseur du nombre, si ce n'est pas le cas on passe à 4, si c'est le cas on calcule le nombre qui multiplié par 3 donne le nombre choisi, ce second facteur est aussi un diviseur ;

▲ on continue et on détermine ainsi les diviseurs dans l'ordre croissant à partir de 1 et dans l'ordre décroissant à partir du nombre, on s'arrête quand on arrive à un diviseur déjà trouvé.

Remarque : le nombre de diviseurs d'un entier non nul est pair sauf si ce nombre est un carré parfait. Tout nombre non nul est un diviseur de 0.

○ Exemple – Etablir la liste des diviseurs de 48.

1 est un diviseur de 48	$48 = 1 \times 48$	48 est un diviseur de 48	1	48
2 est un diviseur de 48	$48 = 2 \times 24$	24 est un diviseur de 48	2	24
3 est un diviseur de 48	$48 = 3 \times 16$	16 est un diviseur de 48	3	16
4 est un diviseur de 48	$48 = 4 \times 12$	12 est un diviseur de 48	4	12
5 n'est pas un diviseur de 48				
6 est un diviseur de 48	$48 = 6 \times 8$	8 est un diviseur de 48	6	8
7 n'est pas un diviseur de 48				

► On a utilisé les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5.

► On n'a pas continué après 7 car on avait déjà trouvé 8 comme diviseur.

Les diviseurs de 48 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.► On a vérifié que le nombre de diviseurs est pair car 48 n'est pas un carré parfait.

○ Exercices

1. Donner la liste des diviseurs de 108.

2. a. Donner la liste des diviseurs de 36.
b. Quelle est la parité du nombre de diviseurs ? Pourquoi ?

3. Donner la liste des diviseurs de 257. Que remarque-ton ?

4. Donner la liste des diviseurs de 300.

5. On veut répartir 32 élèves pour un travail en plusieurs groupes comprenant chacun le même nombre d'élèves. Donner toutes les possibilités sachant que chaque groupe est constitué de plusieurs élèves.

6. a. Donner la liste des diviseurs de 72.
b. Donner la liste des diviseurs de 84.
c. Donner la liste des diviseurs communs de 72 et 84.

Méthode 4. Comment déterminer le PGCD de deux nombres entiers connaissant l'ensemble des diviseurs de chacun des deux nombres ?

Pour déterminer le PGCD de deux nombres entiers connaissant l'ensemble des diviseurs de chacun des deux nombres :
▲ on établit la liste des diviseurs communs des deux nombres (*méthode 3*) ;
▲ on repère dans cette liste le plus grand nombre, c'est le PGCD cherché.

○ Exemple

Les diviseurs de 48 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48. Les diviseurs de 72 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.
a. Donner la liste des diviseurs communs de 48 et 72.
b. En déduire le PGCD de 48 et 72.

a. Les diviseurs communs de 48 et 72 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.
b. Le PGCD de 48 et 72 est 12. ► On a repéré le plus grand nombre de la liste.

○ Exercices

1. Les diviseurs de 90 sont : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.
Les diviseurs de 126 sont : 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126.
a. Donner la liste des diviseurs communs de 90 et 126.
b. Quel est le PGCD de 90 et 126 ?

2. Les diviseurs de 132 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132.
Les diviseurs de 220 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220.
a. Quels sont les diviseurs communs de 132 et 220 ?
b. Quel est le PGCD de 132 et 220 ?

3. Les diviseurs de 105 sont : 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.
Les diviseurs de 175 sont : 1, 5, 7, 25, 35, 175.
a. Etablir la liste des diviseurs communs de 105 et 175.
b. Quel est le PGCD de 105 et 175 ?

4. a. Etablir la liste des diviseurs de 124 et celle des diviseurs de 65.
b. Quels sont les diviseurs communs de 124 et 65 ?
c. Quel est le PGCD de 124 et 65 ?

5. a. Donner la liste des diviseurs de 38 et celle des diviseurs de 190.
b. Quels sont les diviseurs communs de 38 et 190 ?
c. Quel est le PGCD de 38 et 190 ? Quelle remarque peut-on faire sur ce PGCD ? Aurait-on pu prévoir ce résultat ?

6. a. Donner la liste des diviseurs de 56 et celle des diviseurs de 70.
b. Quels sont les diviseurs communs de 56 et 70.
c. En déduire le PGCD de 56 et 70.

Méthode 5. Comment déterminer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme des soustractions ?

Pour déterminer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme des soustractions :
▲ on calcule la différence des deux nombres ;
▲ on garde le plus petit des deux nombres et la différence trouvée et on écrit que le PGCD cherché est leur PGCD ;
▲ on recommence le même procédé avec les deux nouveaux nombres jusqu'à l'obtention de deux nombres égaux, le PGCD est égal à leur valeur.
La méthode s'appuie sur les propriétés suivantes : a et b désignant deux entiers, si $a = b$, alors $\text{PGCD}(a;b) = a = b$ et si $a > b$, $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;a-b)$.

○ Exemple – Déterminer le PGCD de 2016 et 1632 par l'algorithme des soustractions.

$2016 - 1632 = 384$ d'où PGCD (2016 ; 1632) = PGCD (1632 ; 384)
$1632 - 384 = 1248$ d'où PGCD (1632 ; 384) = PGCD (1248 ; 384)
$1248 - 384 = 864$ d'où PGCD (1248 ; 384) = PGCD (864 ; 384)
$864 - 384 = 480$ d'où PGCD (864 ; 384) = PGCD (480 ; 384)
$480 - 384 = 96$ d'où PGCD (480 ; 384) = PGCD (384 ; 96)
$384 - 96 = 288$ d'où PGCD (384 ; 96) = PGCD (288 ; 96)
$288 - 96 = 192$ d'où PGCD (288 ; 96) = PGCD (192 ; 96)
$192 - 96 = 96$ d'où PGCD (192 ; 96) = PGCD (96 ; 96) or PGCD (96 ; 96) = 96
► On est arrivé à deux nombres égaux.
donc PGCD (2016 ; 1632) = 96.

○ Exercices – On utilisera l'algorithme des soustractions.

1. Déterminer le PGCD de 1210 et 462.

2. Déterminer le PGCD de 510 et 374.

3. Déterminer le PGCD de 189 et 55. Que remarque-t-on ?

4. Déterminer le PGCD de 2072 et 370.

5. Déterminer le PGCD de 1631 et 932.

6. Déterminer le PGCD de 2940 et 1155.

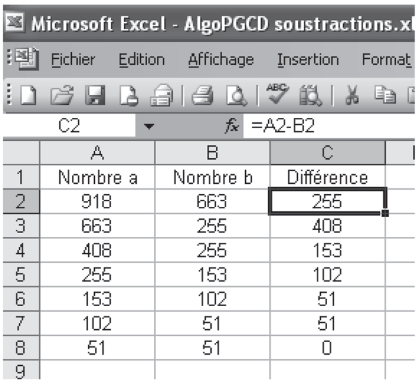
7. a. Déterminer le PGCD de 15 et 9 puis celui de 75 et 45.
b. Compléter $75 = \ldots \times 15$ et $45 = \ldots \times 9$.
Quelle relation y a-t-il entre le PGCD de 15 et 9 et celui de 75 et 45 ?

Méthode 6. Comment déterminer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme des soustractions à l'aide d'un tableur ?

Pour déterminer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme des soustractions à l'aide d'un tableur :

▲ on ouvre une feuille de calcul et on choisit trois colonnes A, B et C ;
▲ on marque les titres : Nombre a, Nombre b et Différence respectivement dans les cellules A1, B1 et C1 ;
▲ on place le plus grand des deux nombres et le plus petit respectivement dans les cellules A2 et B2 et on inscrit =A2-B2 dans la cellule C2 ;
▲ on écrit : =MAX(B2;C2), =MIN(B2;C2) et =A3-B3 respectivement dans les cellules A3, B3 et C3 ;
▲ on sélectionne les cellules A3B3C3 et on tire vers le bas le petit carré situé en bas à droite de la sélection jusqu'à trouver 0 dans la colonne C ;
▲ on donne le PGCD des deux nombres qui est la dernière différence non nulle.

○ Exemple – Utiliser un tableur pour calculer PGCD (918 ; 663) par l'algorithme des soustractions.



	A	B	C
1	Nombre a	Nombre b	Différence
2	918	663	255
3	663	255	408
4	408	255	153
5	255	153	102
6	153	102	51
7	102	51	51
8	51	51	0
9			

► On a marqué les titres.
► On a placé 918 dans la cellule A2 et 663 dans la cellule B2.
► On a écrit les formules dans les autres cellules sans oublier d'écrire =.
► On a sélectionné A3B3C3 et tiré vers le bas à l'aide de la poignée de recopie.
► On s'est arrêté à la ligne 8 car la différence en C8 est 0.
► On a conclu.

PGCD (918 ; 663) = 51.

Remarque : pour calculer le PGCD de deux autres nombres, on remplace les anciens nombres par les nouveaux dans les cellules A2 et B2 et si besoin on tire davantage la poignée de recopie vers le bas.

○ Exercices* – Calculer par l'algorithme des soustractions avec un tableur.

1. PGCD (1260 ; 735) 2. PGCD (25 333 333 344 ; 14 777 777 784)
3. PGCD (2015 ; 1789) 4. PGCD (4092 ; 1705)
5. PGCD (877 ; 531) 6. PGCD (108 777 ; 61 206)
7. a. PGCD (165 ; 132) b. PGCD (330 ; 264) c. PGCD (495 ; 396)
d. Quelles relations y a-t-il entre le PGCD de 165 et 132 et chacun des PGCD de 330 et 264 et de 495 et 396 ? Faire le lien avec les nombres donnés.

* *Pour les exercices complémentaires, se reporter page 571*

Méthode 7. Comment déterminer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme d'Euclide ?

Pour déterminer le PGCD de deux nombres entiers par l'algorithme d'Euclide :
▲ on effectue la division euclidienne du plus grand nombre par le plus petit ;
▲ on conserve le plus petit des deux nombres et le reste trouvé et on écrit que le PGCD cherché est leur PGCD ;
▲ on recommence le même procédé de division avec les deux nouveaux nombres ;
▲ on continue ainsi jusqu'à l'obtention d'un reste nul, le PGCD est le dernier reste non nul.
La méthode s'appuie sur la propriété suivante : a et b désignant deux entiers, si $a > b$, $\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

○ Exemples

a. Déterminer le PGCD de 2016 et 1632 par l'algorithme d'Euclide.
b. Comparer la détermination du PGCD de 2016 et 1632 par l'algorithme d'Euclide et par celui des soustractions (méthode 5).

a. $2016 = 1632 \times 1 + 384$ d'où PGCD (2016 ; 1632) = PGCD (1632 ; 384)
$1632 = 384 \times 4 + 96$ d'où PGCD (1632 ; 384) = PGCD (384 ; 96)
$384 = 96 \times 4 + 0$ d'où PGCD (384 ; 96) = 96 ► On est arrivé à un reste nul.
donc PGCD (2016 ; 1632) = 96.

b. Pour déterminer le PGCD de 2016 et 1632 par l'algorithme d'Euclide il faut 3 opérations tandis que par l'algorithme des soustractions il en faut 8. La recherche du PGCD de 2016 et 1632 est plus courte par l'algorithme d'Euclide.

○ Exercices – On utilisera l'algorithme d'Euclide.

1. Déterminer le PGCD de 780 et 504.

2. Déterminer le PGCD de 988 et 363.

3. Déterminer le PGCD de 7375 et 472.

4. a. Déterminer le PGCD de 2072 et 370.
b. Comparer avec l'algorithme des soustractions (*méthode 5 exercice 4*).

5. Déterminer le PGCD de 2037 et 454.

6. a. Déterminer le PGCD de 2940 et 147.
b. Que remarque-t-on ?

7. a. Déterminer le PGCD de 36 et 20 puis celui de 108 et 60.
b. Recopier et compléter : 108 est le ……… de 36 ; 60 est le ……… de 20.
Quelle relation a-t-on entre le PGCD de 108 et 60 et celui de 36 et 20 ?