Chapitre 1

SUITES

1.1 Définitions. Convergence

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou des fois $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On la note souvent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $n \longmapsto x_n$.

✍ La suite numérique $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n \geq N \implies |x_n - l| \leq \varepsilon).$$

✍ Si une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge, alors sa limite est unique.

✍ Deux suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont dites *adjacentes* si $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante, $(y_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$.

✍ **Suite de Fibonacci :** elle est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour $n \geq 2$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Les premiers termes sont : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$. La forme générale est donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Théorème 1.1 Théorème d'encadrement
Soient $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ trois suites réelles telles que :
◇ $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n \geq N \implies x_n \leq y_n \leq z_n)$,
◇ $(x_n)_{n\geq 0}$ *et* $(z_n)_{n\geq 0}$ *convergent vers la même limite* l.
Alors, la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge également vers la même limite l. □

Théorème 1.2 *Toute suite réelle croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente.* □

Théorème 1.3 *Si deux suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont la même limite. De plus, si l est la limite commune des deux suites, alors on a :*
$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \leq x_{n+1} \leq l \leq y_{n+1} \leq y_n.$ □

Exemple 1.1 Déterminer la forme générale de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_1 = 1$ et

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} + n & \text{si } n \text{ est impair} \\ x_{n-1} + n - 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Si on avait $x_n = x_{n-1} + n$ pour tout n, alors les termes de la suite seraient les nombres triangulaires $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Si on avait $x_n = x_{n-1} + n - 1$ pour tout n, alors les termes de la suite seraient $t_{n-1} + 1 = \frac{n^2-n+2}{2}$. Dans notre cas, on a plutôt :

$$\frac{n^2 - n + 2}{2} \leq x_n \leq \frac{n^2 + n}{2}.$$

Tout laisse à penser que $x_n = \left\lfloor \dfrac{n^2 + an + b}{2} \right\rfloor$. Il est facile de deviner que $x_n = \left\lfloor \dfrac{n^2 + 1}{2} \right\rfloor$, en effet

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n^2+1}{2} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{(n-1)^2+1}{2} + \frac{2(n-1)+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-1)^2+1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + (n-1) \\ &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{(n-1)^2+1}{2} \right\rfloor + (n-1) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left\lfloor \frac{(n-1)^2+1}{2} \right\rfloor + n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 1.2 Soient $a_0 > 0$, $c > 0$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + c}{1 - a_n c}.$$

Est-il possible que les 2016 premiers termes $a_0, a_1, \cdots, a_{2015}$ soient tous strictement positifs, et que $a_{2016} < 0$? □

Rappelons la formule trigonométrique :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}.$$

Il est facile de voir qu'on peut trouver des angles $0 < \alpha,\ \beta < 90°$ tels que $\tan\alpha > 0$, $\tan(\alpha+\beta) > 0, \cdots, \tan(\alpha + 2015\,\beta) > 0$ alors que $\tan(\alpha + 2016\,\beta) < 0$. Il suffit de noter que si on prend $a_0 = \tan\alpha$ et $c = \tan\beta$, alors $a_n = \tan(\alpha + n\beta)$.

Exemple 1.3 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_0 > 0$, $x_1 > 0$ et

$$\forall\, n \geq 0, \qquad x_{n+2} \;=\; \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}.$$

Déterminer x_{2016}. □

On a

$$x_2 = \frac{1+x_1}{x_0}, \quad x_3 = \frac{x_0 + x_1 + 1}{x_0 x_1}, \quad x_4 = \frac{1+x_0}{x_1}, \quad x_5 = x_0 \quad \text{et} \quad x_6 = x_1.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est périodique de période 5. Par conséquent, $x_{2016} = x_1$.

Exemple 1.4 Soient $q \in \mathbb{N}^*$ un carré parfait, $q = m^2$, et considérons la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = 0$, $x_1 = m$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_{n-1} + x_{n+1} \;=\; q x_n.$$

Soient a et b deux entiers strictement positifs tels que $ab+1$ divise a^2+b^2. Montrer que $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ est un carré parfait. □

La paire $(x, y) = (a, b)$ est une solution entière de l'équation $x^2 + y^2 = q(xy + 1)$. Il suffit de prendre $x = x_n$ et $y = x_{n+1}$ pour déduire que :

$$x_n^2 + x_{n+1}^2 \;=\; q\,(x_n x_{n+1} + 1)\,.$$

Le terme général de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est donné par :

$$x_n \;=\; \sqrt{\frac{q}{q^2-4}}\left[\left(\frac{q + \sqrt{q^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{q - \sqrt{q^2-4}}{2}\right)^n\right].$$

Exemple 1.5 Soit $x > 0$ un nombre réel et considérons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Montrer que :

$$1 + f(1) + f(f(1)) + \cdots + \underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ fois}} \;=\; \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + \cdots + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$$

où $F_1 = F_2 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (suite de Fibonacci). □

Le résultat découle simplement du fait que :

$$f\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) \;=\; \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n+1}}+1} \;=\; \frac{F_{n+1}}{F_n+F_{n+1}} \;=\; \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}.$$

Exemple 1.6 La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est définie par $x_1 = \dfrac{2}{3}$ et

$$\forall\, n \geq 1, \qquad x_{n+1} \;=\; \frac{x_n}{2(2n+1)x_n+1}.$$

Calculer $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2016}$. □

Il est clair que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $y_n = \dfrac{2}{x_n}$. On a $y_1 = 3$ et

$$\forall\, n \geq 1, \qquad y_{n+1} \;=\; 4(2n+1) + y_n.$$

Par simple récurrence, on déduit de la relation ci-dessus que :

$$\forall\, n \geq 1, \qquad y_n \;=\; (2n-1)(2n+1).$$

Par conséquent,

$$x_n \;=\; \frac{2}{y_n} \;=\; \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \;=\; \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}.$$

Finalement

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i \;=\; 1 - \frac{1}{4033} \;=\; \frac{4032}{4033}.$$

Exemple 1.7 (**Graham, Knuth, Patashnik**)
Déterminer la forme générale de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ dont les premiers termes sont :

$$1,\, 2,\, 2,\, 3,\, 3,\, 3,\, 4,\, 4,\, 4,\, 4,\, 5,\, 5,\, 5,\, 5,\, 5,\, 6, \cdots$$

L'entier n apparaît n fois consécutives dans la suite. □

On voit que le m-ème terme de la suite est égal à n exactement pour les m tels que :

$$\frac{n^2-n}{2} + 1 \;\leq\; m \;\leq\; \frac{n^2+n}{2}.$$

Donc, la suite croît à la même vitesse que la racine carrée de deux fois l'indice. On réécrit l'inégalité ci-dessus comme $n^2 - n + 2 \leq 2m \leq n^2 + n$ et on veut exprimer n en fonction de m. Comme m et n sont des entiers, l'inégalité est équivalente à : (notons que $n^2 - n$ est pair)

$$n^2 - n + \frac{1}{4} \ < \ 2m \ < \ n^2 + n + \frac{1}{4}.$$

En prenant la racine carrée on obtient :

$$n - \frac{1}{2} \ < \ \sqrt{2m} \ < \ n + \frac{1}{2} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad n \ < \ \sqrt{2m} + \frac{1}{2} \ < \ n + 1.$$

Ceci est possible si, et seulement si, $n = \left\lfloor \sqrt{2m} + \frac{1}{2} \right\rfloor$, ce qui donne la forme générale de la suite :

$$a_n \ = \ \left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad n \geq 1.$$

Exemple 1.8 On définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$ et pour $n \geq 0$:

$$x_{n+4} \ = \ 2x_{n+3} + x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n \,|\, x_n$. □

Un calcul simple montre que $x_4 = 12$, $x_5 = 25$ et $x_6 = 48$. On observe aussi que

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_3}{3} = 2, \quad \frac{x_4}{4} = 3, \quad \frac{x_5}{5} = 5, \quad \frac{x_6}{6} = 8.$$

On reconnaît les premiers termes de la suite de Fibonacci. On se propose de montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a : $x_n = nF_n$. Le résultat est vrai pour les petites valeurs de n. Maintenant :

$$\begin{aligned} x_{n+4} &= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - nF_n \\ &= 2(n+3)F_{n+3} + (n+2)F_{n+2} - 2(n+1)F_{n+1} - n\left(F_{n+2} - F_{n+1}\right) \\ &= 2(n+3)F_{n+3} + 2F_{n+2} - (n+2)\left(F_{n+3} - F_{n+2}\right) \\ &= (n+4)\left(F_{n+3} + F_{n+2}\right) \ = \ (n+4)F_{n+4}. \end{aligned}$$

Par suite, on a montré que $n \,|\, x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.9 (**Russie, 1995**)
La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ vérifie

$$\forall\, m \geq n \geq 0, \qquad x_{m+n} + x_{m-n} \ = \ \frac{1}{2}\left(x_{2m} + x_{2n}\right).$$

Si $x_1 = 1$, déterminer la forme générale de x_n. □

Les relations $x_m + x_m = \frac{1}{2}(x_{2m} + x_0)$ et $x_{2m} + x_0 = \frac{1}{2}(x_{2m} + x_{2m})$ impliquent que $x_{2m} = 4x_m$ et $x_0 = 0$. On calcule $x_2 = 4$, $x_4 = 16$. De même, $x_1 + x_3 = \frac{x_0+x_4}{2} = 10$ donne $x_3 = 9$. On se propose de montrer, par récurrence, que $x_k = k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $x_j = j^2$ pour tous les $j < k$ et montrons que $x_k = k^2$. En prenant $m = k-1$ et $n = 1$ dans les relations de l'exemple on déduit que

$$x_k = \frac{1}{2}\left(x_{2k-2} + x_2\right) - x_{k-2} = 2x_{k-1} + 2x_1 - x_{k-2} = 2\left(k^2 - 2k + 1\right) + 2 - \left(k^2 - 4k + 4\right) = k^2.$$

En conclusion, on a montré que $x_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.10 (**Roumanie, 2012**)
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers naturels telle que $a_n \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\forall\, n \geq 2, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi a_k}{n}\right) = 0.$$

Trouver la forme générale de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$. □

On a $a_1 = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi a_1}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi a_2}{3}\right) = 0$ impliquent que $a_2 = 2$. Montrons par récurrence que $a_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $a_k = k$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors par les données de l'exercice et l'hypothèse de récurrence on a :

$$\cos\left(\frac{\pi a_n}{n+1}\right) = -\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

On pose $z = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$, on a $z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{z - z^{n+1}}{1-z} = \dfrac{1+z}{1-z}$. Comme $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ alors

$$\overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = -\frac{1+z}{1-z} \qquad \text{et par suite} \qquad \Re e\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0.$$

Par suite, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 0$. Des relations $\cos\left(\frac{\pi a_n}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)$ et $a_n \leq n$ on conclut que $a_n = n$.

Exemple 1.11 Montrer que la seule suite infinie $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)^2$$

est la suite définie par $a_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

On fait un raisonnement par récurrence. Pour $k = 1$ c'est vrai puisque $a_1^3 = a_1^2$ et $a_1 > 0$ donnent $a_1 = 1$. Supposons que le résultat est vrai jusqu'au rang k, et montrons le au rang $k+1$. Par la condition de l'exercice et l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + a_{k+1}^3 &= (1 + 2 + \cdots + k + a_{k+1})^2 \\ &= (1 + 2 + \cdots + k)^2 + 2(1 + 2 + \cdots + k)a_{k+1} + a_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Par suite

$$a_{k+1}^3 = 2(1 + 2 + \cdots + k)a_{k+1} + a_{k+1}^2 = 2\frac{k(k+1)}{2}a_{k+1} + a_{k+1}^2.$$

En divisant par $a_{k+1} \neq 0$, on obtient $a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0$. L'équation du second degré $X^2 - X - k(k+1) = 0$ admet comme racines $-k$ et $k+1$, et puisque $a_{k+1} > 0$ on déduit que $a_{k+1} = k+1$, ce qui termine la preuve par récurrence.

Exemple 1.12 (**OIM, 1976**)
La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie par $u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{5}{2}$ et

$$\forall\, n \geq 1, \qquad u_{n+1} = u_n \left(u_{n-1}^2 - 2\right) - u_1.$$

Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \lfloor u_n \rfloor = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$

On calcule les cinq premiers termes de la suite :

$$u_0 = 1 + \frac{1}{1}, \quad u_1 = 2 + \frac{1}{2}, \quad u_3 = 8 + \frac{1}{8}, \quad u_4 = 32 + \frac{1}{32}, \quad u_5 = 2048 + \frac{1}{2048}.$$

On peut les écrire comme suit :

$$u_0 = 2^0 + \frac{1}{2^0}, \quad u_1 = 2^1 + \frac{1}{2^1}, \quad u_2 = 2^1 + \frac{1}{2^1}, \quad u_3 = 2^3 + \frac{1}{2^3}, \quad u_4 = 2^5 + \frac{1}{2^5}, \quad u_5 = 2^{11} + \frac{1}{2^{11}}.$$

On conjecture alors que

$$u_n = 2^{f(n)} + 2^{-f(n)} \qquad \text{avec} \qquad f(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

La conjecture est vraie pour $n \in [\![0, 5]\!]$, montrons la par récurrence. Supposons que le résultat est vrai jusqu'au rang n, et montrons le au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(2^{f(n)} + 2^{-f(n)}\right)\left(2^{2f(n-1)} + 2^{-2f(n-1)}\right) - \frac{5}{2} \\ &= 2^{f(n)+2f(n-1)} + 2^{-f(n)+2f(n-1)} + 2^{f(n)-2f(n-1)} + 2^{-f(n)-2f(n-1)} - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned}
f(n)+2f(n-1) &= \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n+2^n-(-1)^{n-1}\cdot 2\right)=\frac{1}{3}\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)\\
&= f(n+1),\\
f(n)-2f(n-1) &= \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n-2^n+(-1)^{n-1}\cdot 2\right)=\frac{1}{3}\left(-(-1)^n+(-1)^{n-1}\cdot 2\right)\\
&= \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1}+2(-1)^{n+1}\right)=(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

D'où $u_{n+1} = 2^{f(n+1)}+2^{-f(n+1)}+2+2^{-1}-\frac{5}{2} = 2^{f(n+1)}+2^{-f(n+1)}$, et la conjecture est ainsi prouvée.
Comme 3 divise $2^n-(-1)^n$ alors $f(n)$ est toujours un entier. Puisque $2^{-f(n)}<1$, alors on conclut que :

$$\lfloor u_n\rfloor = \left\lfloor 2^{f(n)}+2^{-f(n)}\right\rfloor = 2^{f(n)} = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}.$$

Exemple 1.13 (**Russie, 1989**)
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que :

$$\forall\, m,n\in\mathbb{N}^*, \qquad |a_m+a_n-a_{m+n}| \leq \frac{1}{m+n}.$$

Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ est une progression arithmétique. □

Pour $k\in\mathbb{N}^*$ fixé et $m\in\mathbb{N}^*$ quelconque on a :

$$|a_{m+1}+a_k-a_{m+k+1}|\leq\frac{1}{m+k+1} \qquad \text{et} \qquad |a_m+a_{k+1}-a_{m+k+1}|\leq\frac{1}{m+k+1}.$$

D'où

$$|(a_{m+1}-a_m)-(a_{k+1}-a_k)| \leq \frac{2}{m+k+1} < \frac{2}{m}.$$

Donc, la suite $(a_{m+1}-a_m)_{m\geq 1}$ converge et a pour limite $(a_{k+1}-a_k)$, et ce pour tout $k\in\mathbb{N}$.
Par conséquent :

$$\forall\, m,n\in\mathbb{N}^*, \qquad a_{m+1}-a_m = a_{n+1}-a_n,$$

ce qui prouve que $(a_n)_{n\geq 1}$ est une progression arithmétique.

Exemple 1.14 On considère la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$x_1=3 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1}=\left\lfloor\sqrt{2}\,x_n\right\rfloor,\ n\geq 1.$$

Déterminer tous les entiers $n\in\mathbb{N}^*$ tels que x_n, x_{n+1} et x_{n+2} forment une progression arithmétique. □