# Chapitre 1

# Raisonnement et vocabulaire ensembliste

## 1.1 Rudiments de logique

### 1.1.1 Assertions

Une **assertion** (ou **propriété**) est un assemblage de mots dont la construction obéit à une certaine syntaxe et à laquelle on peut donner une valeur de vérité : V (vraie) ou F (faux).

☞ « 3 est un nombre impair » est une assertion vraie.

☞ « $10^2 = 101$ » est une assertion fausse.

☞ « $2 = 3+$ » n'est pas une assertion.

**Définition 1.1 Connecteurs élémentaires**

Si $P$ et $Q$ sont deux assertions, on définit les assertions :

✓ (Non $P$) qui est vraie lorsque $P$ est fausse, et fausse sinon ;

✓ ($P$ et $Q$) qui est vraie lorsque les deux assertions $P$ et $Q$ sont vraies, et fausse sinon ;

✓ ($P$ ou $Q$) qui est vraie lorsqu'au moins une des deux assertions est vraie, et fausse sinon.

Les valeurs de vérité de ces nouvelles assertions satisfont aux tables suivantes :

| $P$ | $Q$ | $P$ et $Q$ | $P$ ou $Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | F |

□

**Définition 1.2 Implication, équivalence**

Si $P$ et $Q$ sont deux assertions, on définit les assertions $P \Longrightarrow Q$ et $P \iff Q$ par :

- ✓ $P \Longrightarrow Q$ : (Non $P$) ou $Q$,
- ✓ $P \iff Q$ : $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$.

Les valeurs de vérité vérifient le tableau suivant :

| $P$ | $Q$ | $P \Longrightarrow Q$ | $P \iff Q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | F |
| F | F | V | V |

□

- ☞ Par définition, l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est vraie dès que $P$ est fausse. Elle peut donc être vraie même lorsque $Q$ est fausse, par exemple l'assertion

$$(2 = 3) \qquad \Longrightarrow \qquad (1 = 4)$$

est vraie.
- ☞ Si $P$ est vraie et si $P \Longrightarrow Q$ est vraie, alors $Q$ est vraie.
- ☞ L'implication $Q \Longrightarrow P$ s'appelle la réciproque de l'implication $P \Longrightarrow Q$.
- ☞ L'équivalence $P \iff Q$ est vraie si, et seulement si, $P$ et $Q$ sont logiquement équivalentes.
- ☞ la négation de $P \Longrightarrow Q$ est donnée par : $\text{Non}(P \Longrightarrow Q) \iff (P \text{ et } \text{Non}(Q))$.
- ☞ On a également : $(P \Longrightarrow Q) \iff (\text{Non}(Q) \Longrightarrow \text{Non}(P))$.

## 1.1.2 Modes de raisonnement

### Raisonnement par récurrence

**Théorème 1.1** *Soit $P$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$. Si :*

- ✓ *$P(0)$ est vraie,*
- ✓ *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Big(P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie$\Big)$.*

*Alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.* □

**Corollaire** Soit $P$ une propriété définie sur $\{n_0, n_0+1, \ldots\}$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$. Si :

- ✓ $P(n_0)$ est vraie,
- ✓ pour tout entier $n \geq n_0$, $\Big(P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie$\Big)$.

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. □

**Corollaire** Soit $P$ une propriété définie sur $\{n_0, n_0+1, \ldots\}$. Si :

✓ $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies,

✓ pour tout entier $n \geq n_0$, $\Big(\big(P(n)$ et $P(n+1)\big)$ vraies entraînent $P(n+2)$ vraie$\Big)$.

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$. □

### Raisonnements pour montrer que $P \Longrightarrow Q$

Les trois types de raisonnements pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ sont :

✍ raisonnement direct : on suppose que $P$ est vraie et on montre que $Q$ est vraie,

✍ raisonnement par contraposée : on suppose que $\text{Non}(Q)$ est vraie et on montre que $\text{Non}(P)$ est vraie,

✍ raisonnement par l'absurde : on suppose que $P$ est vraie, et on suppose « par l'absurde » que $\text{Non}(Q)$ est vraie. On cherche alors une contradiction.

## 1.2 Ensembles

❏ Un ensemble est une collection d'objets. La notation $x \in E$ signifie $x$ appartient à $E$ ; sa négation est notée $x \notin E$. On note $\varnothing$ l'ensemble vide, qui n'a aucun élément.

❏ Le quantificateur universel $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit ». L'expression $(\forall x \in E,\ P(x))$ se lit pour tout élément $x$ appartenant à $E$ on a $P(x)$.

❏ Le quantificateur universel $\exists$ se lit « il existe au moins un élément ». La notation $\exists!$ signifie « il existe un et un seul élément ». L'expression $(\exists x \in E,\ P(x))$ se lit il existe au moins un élément $x$ appartenant à $E$ tel que l'on ait $P(x)$.

❏ Négation d'une phrase quantifiée : on a

$$\begin{cases} \big(\text{Non}(\forall\, x \in E,\ P(x)\big) & \Longleftrightarrow \quad \big(\exists\, x \in E,\ \text{Non}\, P(x)\big), \\ \big(\text{Non}(\exists\, x \in E,\ P(x)\big) & \Longleftrightarrow \quad \big(\forall\, x \in E,\ \text{Non}\, P(x)\big), \end{cases}$$

✍ **Limite d'une suite réelle.** Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On dit que $l \in \mathbb{R}$ est limite de $(x_n)_{n\geq 0}$ lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \implies |x_n - l| \ \leq\ \varepsilon.$$

La phrase exprimant qu'un réel $l$ n'est pas limite de $(x_n)_{n\geq 0}$ est alors :

$$\exists\,\varepsilon > 0,\ \forall\,p \in \mathbb{N},\ \exists\,n \in \mathbb{N},\quad n \geq p \text{ et } |x_n - l| \ >\ \varepsilon.$$

✍ **Continuité.** Une application $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0,\ \forall\,x \in \mathbb{R},\quad |x - a|\ <\ \eta\ \implies\ |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

La phrase exprimant que $f$ n'est pas continue en $a$ est alors :

$$\exists\,\varepsilon > 0,\ \forall\,\eta > 0,\ \exists\,x \in \mathbb{R},\quad \Big(|x - a|\ <\ \eta \text{ et } |f(x) - f(a)|\ >\ \varepsilon\Big).$$

**Définition 1.3 Inclusion**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On dit que $E$ est inclus dans $F$ (ou $E$ est une partie de $F$), et on note $E \subset F$, si : $\forall\,x \in E,\ x \in F$.

On note $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des parties de $F$. □

**Définition 1.4 Opérations dans $\mathcal{P}(E)$**

Soit $E$ un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit les parties suivantes de $E$ :

- ✓ complémentaire de $A$ dans $E$ : $\complement_E A = \{x \in E\,;\ x \notin A\}$,
- ✓ réunion de $A$ et $B$ : $A \cup B = \{x \in E;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$,
- ✓ intersection de $A$ et $B$ : $A \cap B = \{x \in E;\ x \in A \text{ et } x \in B\}$,
- ✓ différence de $A$ moins $B$ : $A - B = \{x \in E;\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$,
- ✓ différence symétrique de $A$ et $B$ : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. □

❏ Couples, produit cartésien : en partant de deux éléments $x$ et $y$, on peut construire le couple $(x, y)$ avec la propriété suivante :

$$(x, y) = (x', y') \quad\iff\quad (x = x' \text{ et } y = y').$$

Étant donnés deux ensembles $A$ et $B$, l'ensemble des couples de la forme $(x, y)$ avec $x \in A$ et $y \in B$ est appelé produit cartésien de $A$ par $B$ et se note $A \times B$. On a donc :

$$A \times B \quad = \quad \{(x, y)\ :\ x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

## 1.3 Applications et relations

**Définition 1.5** Une application $f$ est un triplet $(E, F, G)$ où $E$ et $F$ sont des ensembles non vides, et $G$ un sous-ensemble de $E \times F$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe un élément $y$ et un seul de $F$ tel que $(x, y)$ appartienne à $G$.
L'élément $y$ est noté $f(x)$. On dit alors que $f$ est une application définie sur $E$ à valeurs dans $F$.
L'ensemble des applications de $E$ dans $F$ est noté $F^E$. □

- ☞ Une application de $E$ dans $F$ associe à tout élément de $E$ un et un seul élément de $F$.
- ☞ L'ensemble $E$ s'appelle l'ensemble de départ de $f$. L'ensemble $F$ s'appelle l'ensemble d'arrivée de $F$, l'ensemble $G$ est le graphe de $f$.
- ☞ Si $x \in E$, on appelle $f(x)$ l'image de $x$ par $f$, et si $y = f(x)$ on appelle $x$ un antécédent de $y$ par $f$.
- ☞ Deux applications $f$ et $g$ sont égales si elles ont même ensemble de départ $E$, même ensemble d'arrivée $F$ et pour tout $x \in E$ on a $f(x) = g(x)$.

**Définition 1.6** **Composée de deux applications.** Soient $E, F, G$ trois ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Alors on définit une application de $E \longrightarrow G$, par $g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, en posant pour tout $x \in E$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

- ✍ Soit $E$ un ensemble non vide, on appelle application identité ou identité de $E$, et l'on note $\mathrm{Id}_E$, l'application de $E \longrightarrow E$ définie par $\mathrm{Id}_E(x) = x$. En particulier, si $f : E \longrightarrow F$ est une application, alors $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.
- ✍ Généralement, même si $E = G$, on n'a pas nécessairement $f \circ g = g \circ f$. En prenant, par exemple, les applications $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par $f(n) = 2n$ et $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si} \quad n \text{ est impair,} \end{cases}$, alors on a : $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ mais $f \circ g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
- ✍ Si $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ sont trois applications où $E, F, G, H$ sont quatre ensembles non vides. Alors, on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

**Définition 1.7** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Si $A$ est une partie de $E$, la restriction de $f$ à $A$, notée $f_{|A}$, est l'application de $A \longrightarrow F$ définie par : $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.
On appelle prolongement de $f$ toute application $g$ définie sur un ensemble $B$ contenant $E$ et vérifiant : $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$. □

**Définition 1.8** **Injectivité.** On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

- ✓ tout élément de $F$ admet au plus un antécédent par $f$,
- ✓ pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution,
- ✓ pour tout $(x, y) \in E^2$ on a : $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$. □

**Définition 1.9** **Surjectivité.** On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

- ✓ tout élément de $F$ admet au moins un antécédent par $f$,
- ✓ pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution,
- ✓ pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. □

**Définition 1.10** **Bijectivité.** On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

- ✓ tout élément de $F$ admet un et un seul antécédent par $f$,
- ✓ pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution,
- ✓ pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. □

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

- ❏ Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- ❏ Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- ❏ Si $f$ et $g$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

**Définition 1.11** **Application réciproque.** Si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective, alors l'application de $F \longrightarrow E$ qui associe à tout élément de $F$ son unique antécédent dans $E$ s'appelle l'application réciproque de $f$ et se note $f^{-1}$. Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

- ❏ Si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective, alors on a : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

- ❑ Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ sont deux applications vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors elles sont toutes les deux bijectives et réciproques l'une de l'autre.
- ❑ Si $f : E \longrightarrow F$ est une bijection, alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est une bijection et on a : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- ❑ Soient $E, F$ et $G$ trois ensembles. Si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ sont deux applications bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et on a :

$$(g \circ f)^{-1} \quad = \quad f^{-1} \circ g^{-1}.$$

**Définition 1.12 Images directes, images réciproques.** Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, $A$ une partie de $E$ et $B$ une partie de $F$. On appelle :

- ✓ image (directe) de $A$ par $f$ l'ensemble

$$f(A) \;=\; \{y \mid \exists x \in A \,:\, y = f(x)\} \;=\; \{f(x) \,:\, x \in A\},$$

- ✓ image réciproque de $B$ par $f$, l'ensemble :

$$f^{-1}(B) \;=\; \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

- ☞ L'utilisation de la notation $f^{-1}(B)$ ne suppose pas que $f$ est bijective.
- ☞ Lorsque $f$ est bijective, $f^{-1}(B)$ représente aussi bien l'image directe de $B$ par l'application $f^{-1}$, que l'image réciproque de $B$ par $f$.
- ☞ Une application $f : E \longrightarrow F$ est :
  – injective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ admet au plus un élément,
  – surjective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ admet au moins un élément,
  – bijective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ admet exactement un élément.

**Proposition 1.1** Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, $B_1$ et $B_2$ deux parties de $F$. Alors on a :

- ✓ $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,
- ✓ $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,
- ✓ $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
- ✓ $f^{-1}\left(\complement_F B_1\right) = \complement_E f^{-1}(B_1)$. □

**Proposition 1.2** Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, $A_1$ et $A_2$ deux parties de $E$. Alors on a :

- ✓ $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$,
- ✓ $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
- ✓ $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. □

☞ Attention, l'inclusion $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ est, en général, fausse. Par exemple, on a :

$$\sin([0, 2\pi]) \cap \sin([-\pi, \pi]) = [-1, 1] \text{ alors que } \sin([0, 2\pi] \cap [-\pi, \pi]) = [0, 1].$$

**Définition 1.13** **Fonctions caractéristiques.** Soit $A$ une partie de $E$, on appelle fonction caractéristique de $A$, l'application $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

☞ On a toujours : $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.

☞ Deux ensembles $A$ et $B$ sont égaux si, et seulement si, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. En particulier, $\mathbb{1}_E = 1$ et $\mathbb{1}_\varnothing = 0$.

**Proposition 1.3** On a les relations suivantes :

- ✓ $\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$.
- ✓ $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
- ✓ $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
- ✓ $\mathbb{1}_{A - B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$.
- ✓ $\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$. □

✍ L'application $A \longmapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ des applications de $E$ dans $\{0, 1\}$.

**Définition 1.14** **Famille indexée.** Étant donnés deux ensembles $I$ et $E$, on appelle famille d'éléments de $E$ indexée par $I$ toute application de $I$ dans $E$. □

- ❑ Si $I = \mathbb{N}$, une famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $E$ est appelée suite d'éléments de $E$.
- ❑ Étant donnés deux ensembles $I$ et $E$, une famille de parties de $E$ indexée par $I$ est une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$. On a :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \ : \ \forall i \in I, \ x \in A_i\}, \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \ : \ \exists i \in I, \ x \in A_i\}$$