Chapitre 1

Techniques fondamentales de calcul

1.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

- On rappelle que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné, d'où :
  - $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y$ ou $y \leq x$,
  - $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leq y + z$,
  - $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq 0$ et $y \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad xy \geq 0$,
- **Valeur absolue :** soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x par :

$$|x| \quad = \quad \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

  On a $|x| = \max(x, -x)$, et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'inégalité triangulaire :

$$|x + y| \quad \leq \quad |x| + |y|.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en notant $x^+ = \max\{x, 0\}$ et $x^- = \min\{-x, 0\}$ on a les relations suivantes :

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad x^+ = \frac{|x| + x}{2}, \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}.$$

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle distance de x à y le nombre $d(x, y)$ donné par : $d(x, y) = |x - y|$.
- **Partie entière :** soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \quad \leq \quad x \quad < \quad p + 1.$$

  L'entier p s'appelle partie entière de x, il est noté $\lfloor x \rfloor$.

Théorème 1.1 Quelques inégalités classiques.

- ✓ $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \qquad |xy| \le \frac{x^2+y^2}{2}$,
- ✓ $\forall (x,n)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{N}, \qquad (1+x)^n \ge 1+nx$, *(inégalité de Bernoulli),*
- ✓ $\forall\,x\in\mathbb{R}, \qquad |\sin x| \le |x|$,
- ✓ $\forall\,x\in[0,\pi/2], \qquad \frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$,
- ✓ $\forall\,x>-1, \qquad \ln(1+x) \le x$.
- ✓ *Inégalité entre la moyenne arithmétique et géométrique : si* $x_1,\cdots,x_n$ *sont des réels positifs alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad\ge\quad (x_1\,x_2\,\cdots\,x_n)^{\frac{1}{n}}$$

avec égalité si, et seulement si, $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

- ✓ *Inégalité de Cauchy-Schwarz : soient* $a_1,\cdots,a_n$ *et* $b_1,\cdots,b_n$ *des nombres réels, alors on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \quad\ge\quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

avec égalité si, et seulement si, a_k *et* b_k *sont proportionnels pour tout* k. □

Définition 1.1 Valeurs décimales approchées. Soient x un nombre réel et $n\in\mathbb{N}^*$. Si $p\in\mathbb{Z}$ est un entier relatif tel que

$$\frac{p}{10^n} \quad\le\quad x \quad\le\quad \frac{p+1}{10^n}$$

on dit que $\frac{p}{10^n}$ (resp. $\frac{p+1}{10^n}$) est une valeur décimale approchée de x par défaut (resp. par excès) à la précision 10^{-n}. □

1.2 Fonctions de la variable réelle

❏ Logarithme népérien : on appelle logarithme népérien, et on note ln, l'application de $\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*, \qquad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ on a : $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$.

❏ Exponentielle : Comme l'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $]0, +\infty[$, strictement croissante et que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, alors l'application ln admet une application réciproque, appelée exponentielle, notée $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Donc :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, \qquad y = \exp(x) \iff x = \ln(y).$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a : $e^{a+b} = e^a e^b$.

❏ Logarithme de base a : soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on appelle logarithme de base a, et on note $\log_a$ l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

❏ Exponentielle de base a : on appelle exponentielle de base a, et on note $\exp_a$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, réciproque de $\log_a$, elle est définie par :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, \quad y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y).$$

❏ Fonctions puissances : Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle fonction puissance d'exposant a l'application qui à $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe $x^a \in \mathbb{R}$.

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0.$$

Pour tout $(a, \alpha) \in]1,+\infty[\times\mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x |x|^\alpha = 0.$$

❏ Fonctions hyperboliques directes :

On appelle sinus hyperbolique l'application $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{sh}(x) \quad = \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On appelle cosinus hyperbolique l'application $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{ch}(x) \quad = \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On appelle tangente hyperbolique l'application $\mathrm{th} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{th}(x) \quad = \quad \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \quad = \quad \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

On appelle cotangente hyperbolique l'application coth : $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\coth(x) \quad = \quad \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

❏ Fonction arcsin : l'application sin : $[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$, strictement croissante, et $\sin(-\pi/2) = -1$, $\sin(\pi/2) = 1$. Donc, l'application sin admet une application réciproque notée arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ et arcsin est continue sur $[-1, 1]$. Ainsi, on a :

$$\forall\,(x, y) \in [-1, 1] \times [-\pi/2, \pi/2], \qquad y = \arcsin x \iff x = \sin y.$$

L'application arcsin est impaire, elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \qquad \arcsin'(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.

❏ Fonction arccos : l'application cos : $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ est continue sur $[0, \pi]$, strictement décroissante, et $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$. Donc, l'application cos admet une application réciproque notée arccos : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ et arccos est continue sur $[-1, 1]$. Ainsi, on a :

$$\forall\,(x, y) \in [-1, 1] \times [0, \pi], \qquad y = \arccos x \iff x = \cos y.$$

L'application arccos n'est ni impaire ni paire, elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a

$$\arccos'(x) \quad = \quad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall\, x \in]-1, 1[.$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.

❏ Fonction arctan : l'application tan : $]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$, strictement croissante, et

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \tan x \ = \ -\infty, \qquad \lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x \ = \ +\infty.$$

Donc, l'application tan admet une application réciproque notée arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ et arctan est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on a :

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}\times]-\pi/2, \pi/2[, \qquad y = \arctan x \iff x = \tan y.$$

L'application arctan est impaire, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\arctan'(x) \quad = \quad \frac{1}{1+x^2}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Finalement, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad = \quad \begin{cases} \frac{-\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0, \\ \frac{+\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

❏ Exponentielle complexe : pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit l'exponentielle complexe de z, notée e^z, par :

$$e^z \quad = \quad e^x e^{iy} \quad = \quad e^x(\cos y + i \sin y).$$

On a pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ la relation : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$. En particulier, $(e^z)^{-1} = \frac{1}{e^z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z \neq 0$.

1.3 Primitives et équations différentielles linéaires

1.3.1 Primitives

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Définition 1.2 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est dérivable en $x \in I$ si $\Re e(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en x. On pose alors : $f'(x) = (\Re e(f))'(x) + i(\mathrm{Im}(f))'(x)$. Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que F est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I telle que $F' = f$. □

✍ Si F est dérivable sur I, alors $F' = 0$ si, et seulement si, F est constante.

✍ Soient $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et F une primitive de f sur I. La fonction $G : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f si, et seulement si, $G - F$ est constante.

✍ Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{C}$, F une primitive de f et G une primitive de g sur I. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, l'application $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$.

1.3.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1.3 Une équation différentielle (E) est dite linéaire du premier ordre si elle s'écrit sous la forme :

$$y' + a(x)y \quad = \quad b(x)$$

où a et b sont des fonctions continues définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Le terme $b(x)$ est le second membre de l'équation. Si b est nul, on dit que l'équation est sans second membre, ou homogène.
On note (E_0) : $y' + a(x)y = 0$ est l'équation homogène (ou sans second membre) associée à (E). □

Définition 1.4 Si a et b sont des constantes, on dit que l'équation est à coefficients constants. Dans ce cas, on résout l'équation sur $I = \mathbb{R}$. □

✍ Solution générale (forme générale des solutions) :

$$y \quad = \quad y_H + y_P$$

avec

$$\begin{cases} y_H & : \text{ solution générale de l'équation homogène associée,} \\ y_P & : \text{ solution (particulière) de l'équation.} \end{cases}$$

✍ Principe de superposition : si ψ_1 et ψ_2 sont respectivement solutions de

$$y' + a(t)y = b_1(t) \qquad \text{et} \qquad y' + a(t)y = b_2(t),$$

alors

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 \text{ est solution de } y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t), \\ \lambda\psi_1 \text{ est solution de } y' + a(t)y = \lambda b_1(t), \ \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Théorème 1.2 Résolution.
Avec la condition initiale $y_0 = y(x_0)$, la solution est donnée par :

$$y \quad = \quad e^{-A(x)} \left[y_0 e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} b(t)\, dt \right].$$

Théorème 1.3 Cas d'une équation homogène.

- ✓ *Solution générale : $y = ke^{-A(x)}, \quad (k \in \mathbb{C})$.*
- ✓ *Avec condition initiale : $y_0 = y(x_0)$; $\qquad y = y_0 e^{-(A(x)-A(x_0))}$.* □

✍ **Méthode d'Euler :** résolution numérique du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = b(x) - a(x)y = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

On choisit le pas $h > 0$ et on définit par récurrence les suites :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & x_n + h, \\ y_{n+1} & = & y_n + f(x_n, y_n) \cdot h \end{cases}$$

La fonction, affine par morceaux, ψ_h définie par $\psi_h(x_n) = y_n$ est une approximation de la solution ψ du problème de Cauchy. En choisissant de petites valeurs de h, on a une bonne approximation.

1.3.3 Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition 1.5 Une équation différentielle (E), linéaire, du second ordre et à coefficients constants est de la forme :

$$ay'' + by' + cy \quad = \quad \alpha(x)$$

où α est une fonction continue (appelée second membre) sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Les termes a, b, c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.
L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est l'équation homogène (ou sans second membre) associée à (E), on la note (E_0). □

✍ Solution générale (forme générale des solutions) :

$$y \quad = \quad y_H + y_P$$

avec

$$\begin{cases} y_H & : \text{ solution générale de l'équation homogène associée,} \\ y_P & : \text{ solution (particulière) de l'équation.} \end{cases}$$

✍ Principe de superposition : si ψ_1 et ψ_2 sont respectivement solutions de

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) \qquad \text{et} \qquad ay'' + by' + cy = f_2(x),$$

alors

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 \text{ est solution de } ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x), \\ \lambda\psi_1 \text{ est solution de } ay'' + by' + cy = \lambda f_1(x), \ \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Théorème 1.4 Résolution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.

✓ *Dans $\mathbb{C}$: on résout l'équation caractéristique $(EC)\ :\ aX^2 + bX + c = 0$.*

⋆ $\Delta = 0$ *: on note α la solution de (EC). Solution générale :*

$$y = (Ax + B)e^{\alpha x}; \qquad A, B \in \mathbb{C}.$$

⋆ $\Delta \neq 0$ *: on note $\alpha \neq \beta$ les solutions de (EC). Solution générale :*

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}; \qquad A, B \in \mathbb{C}.$$

✓ *Dans $\mathbb{R}$: $(a, b, c \in \mathbb{R})$. On résout $(EC)\ :\ aX^2 + bX + c = 0$.*

⋆ $\Delta > 0$ *: deux solutions réelles $\alpha \neq \beta$ pour (EC). Solution générale :*

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

⋆ $\Delta = 0$ *: une solution double $\alpha \in \mathbb{R}$ pour (EC). Solution générale :*

$$y = (Ax + B)e^{\alpha x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

⋆ $\Delta < 0$ *: deux solutions imaginaires conjuguées $\alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Solution générale :*

$$y = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.5 Solution particulière si $f(x) = e^{mx}P(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P polynôme de degré n.

Solution particulière : $\psi(x) = e^{mx}Q(x)$ où Q est un polynôme.

✓ *Si $am^2 + bm + c \neq 0$, alors Q est de degré n.*

✓ *Si $\begin{cases} am^2 + bm + c & = 0 \\ 2am + b & \neq 0 \end{cases}$, alors Q est de degré $n+1$ (le coefficient constant est indéterminé).*