

# Table des matières

<b>1</b>	<b>GÉNÉRALITÉS. RÉSULTATS DE BASE</b>	<b>7</b>
1.1	Notations . . . . .	7
1.2	Angles . . . . .	10
1.3	Triangles isométriques . . . . .	11
1.4	Triangles : côtés et angles . . . . .	13
1.5	Cercles et angles . . . . .	16
1.6	Cercles et tangentes . . . . .	18
1.7	Points remarquables dans un triangle . . . . .	21
1.8	Aire . . . . .	24
1.9	Chasse aux angles . . . . .	29
1.10	Droites perpendiculaires . . . . .	34
1.11	Droites antiparallèles . . . . .	37
1.12	Complément : matrices et déterminants . . . . .	41
1.13	Exercices . . . . .	42
<b>2</b>	<b>TRIGONOMÉTRIE</b>	<b>47</b>
2.1	Définitions. Relations trigonométriques . . . . .	47
2.2	Calculs avec les expressions trigonométriques . . . . .	53
2.3	Extremums et trigonométrie . . . . .	59
2.4	Loi des sinus. Théorèmes de Céva et de Ménélaüs . . . . .	64
2.5	Problèmes de géométrie plane et trigonométrie . . . . .	75
2.6	Exercices . . . . .	81
<b>3</b>	<b>GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE</b>	<b>111</b>
3.1	Théorème de Céva. Théorème de Ménélaüs . . . . .	111
3.1.1	Théorème de Céva . . . . .	111
3.1.2	Théorème de Ménélaüs . . . . .	116
3.2	Points remarquables dans un triangle . . . . .	122
3.2.1	Orthocentre . . . . .	123
3.2.2	Centre du cercle inscrit . . . . .	127
3.2.3	Centre du cercle exinscrit . . . . .	129
3.2.4	Exercices d'application . . . . .	131

3.3	Méthodes de résolution des problèmes d'alignement . . . . .	138
3.3.1	Présentation des méthodes . . . . .	138
3.3.2	Exercices d'application . . . . .	142
3.4	Méthodes de résolution des problèmes de concourance . . . . .	154
3.4.1	Présentation des méthodes . . . . .	154
3.4.2	Exercices d'application . . . . .	159
3.5	Conjugués isogonaux et triangles podaires . . . . .	170
3.6	Symédiannes et applications . . . . .	175
3.7	Exercices . . . . .	180
<b>4</b>	<b>CERCLES</b>	<b>183</b>
4.1	Propriétés fondamentales des cercles . . . . .	183
4.1.1	Exercices d'applications . . . . .	187
4.2	Droites et cercles . . . . .	193
4.2.1	Exercices d'application . . . . .	198
4.3	Droite de Simson . . . . .	203
4.4	Quadrilatères inscrits . . . . .	206
4.4.1	Exercices d'application . . . . .	211
4.5	Puissance d'un point . . . . .	217
4.5.1	Exercices d'application . . . . .	225
4.5.2	Shooting lemma . . . . .	231
4.6	Cercles tangents . . . . .	234
4.6.1	Exercices d'application . . . . .	236
4.7	Droite tangente à un cercle . . . . .	245
4.7.1	Exercices d'application . . . . .	247
4.8	Cercle inscrit et droites perpendiculaires . . . . .	250
4.9	Exercices . . . . .	254
<b>5</b>	<b>TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES</b>	<b>257</b>
5.1	Homothéties . . . . .	259
5.1.1	Homothéties et cercles . . . . .	261
5.1.2	Composition des homothéties . . . . .	264
5.1.3	Exercices . . . . .	266
5.2	Rotations . . . . .	272
5.2.1	Exercices . . . . .	275
5.3	Similitudes . . . . .	277
5.3.1	Exercices . . . . .	283
5.4	Exercices . . . . .	286
<b>6</b>	<b>GRANDS THÉORÈMES</b>	<b>295</b>
6.1	Théorème de Céva . . . . .	295
6.2	Théorème de Ménélaüs . . . . .	297
6.3	Théorème de Ptolémée . . . . .	299
6.4	Théorèmes de Desargues et de Pascal . . . . .	304
6.5	Théorème du papillon . . . . .	311

6.5.1	Généralisation du théorème du papillon . . . . .	314
6.6	Théorème des projections orthogonales . . . . .	317
6.7	Théorème de la bissectrice et arcs de cercles . . . . .	321
6.8	Théorème de Jacobi . . . . .	324
6.9	Autres grands théorèmes . . . . .	327
6.9.1	Théorème des quatre cercles de Jordan Tabov . . . . .	327
6.9.2	Théorème de Morley . . . . .	329
6.9.3	Théorème de Neuberg . . . . .	330
6.9.4	Théorème de Newton . . . . .	331
6.9.5	Théorème de Viviani . . . . .	332
6.9.6	Théorème de Brianchon . . . . .	333
6.9.7	Théorème de H. M. Taylor . . . . .	335
6.9.8	Théorème de Brocard . . . . .	336
6.9.9	Théorème de S. N. Collings . . . . .	337
6.10	Exercices . . . . .	339
<b>7</b>	<b>QUADRILATÈRES</b>	<b>341</b>
7.1	Définitions. Propriétés fondamentales . . . . .	341
7.1.1	Théorèmes d'Euler et de Leibniz . . . . .	344
7.1.2	Quadrilatère orthodiagonal . . . . .	346
7.1.3	Médianes et bimédianes dans un quadrilatère . . . . .	347
7.2	Principaux théorèmes pour les quadrilatères convexes . . . . .	349
7.2.1	Quadrilatère complet . . . . .	352
7.2.2	Relations métriques dans un quadrilatère convexe . . . . .	359
7.3	Quadrilatère cyclique (ou inscriptible) . . . . .	364
7.3.1	Exercices d'applications . . . . .	371
7.3.2	Relations métriques dans un quadrilatère cyclique . . . . .	383
7.3.3	Théorème de Casey et généralisations . . . . .	386
7.4	Quadrilatère tangentiel (ou circonscriptible) . . . . .	395
7.4.1	Théorèmes du type Casey pour les quadrilatères tangentiels . . . . .	399
7.5	Quadrilatère bicentrique . . . . .	400
7.6	Exercices . . . . .	406
<b>8</b>	<b>GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE</b>	<b>415</b>
8.1	Géométrie analytique . . . . .	415
8.1.1	Produit scalaire et déterminant . . . . .	415
8.1.2	Calculs vectoriels dans l'espace . . . . .	416
8.1.3	Relations métriques dans le triangle . . . . .	422
8.1.4	Aire . . . . .	426
8.1.5	Coordonnées cartésiennes . . . . .	431
8.1.6	Exercices . . . . .	440
8.2	Coordonnées barycentriques . . . . .	441
8.2.1	Coordonnées barycentriques de points remarquables . . . . .	441
8.2.2	Droites. Alignement et concours . . . . .	448
8.2.3	Cercles. Puissance d'un point par rapport à un cercle . . . . .	452

8.2.4 Exercices . . . . .	454
8.3 Coordonnées trilineaires . . . . .	466
8.4 Exercices . . . . .	473
<b>9 GÉOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES</b>	<b>495</b>
9.1 Propriétés de base . . . . .	495
9.2 Colinéarité, orthogonalité et cocyclicité . . . . .	496
9.3 Triangles semblables . . . . .	498
9.4 Triangles équilatéraux . . . . .	499
9.5 Géométrie analytique dans le plan complexe . . . . .	502
9.6 Cercles et nombres complexes . . . . .	506
9.7 Orthogonalité et parallélisme . . . . .	508
9.8 Aire d'un polygone convexe . . . . .	511
9.9 Céviennes et quelques points remarquables dans le triangle . . . . .	512
9.10 Cercle des neuf points d'Euler . . . . .	517
9.11 Triangle podaire . . . . .	520
9.12 Triangles orthopolaires ou triangles-S . . . . .	524
9.13 Transformations géométriques et nombres complexes . . . . .	526
9.14 Relations métriques et nombres complexes . . . . .	527
9.15 Problèmes de colinéarité et nombres complexes . . . . .	532
9.16 Problèmes de concourance et nombres complexes . . . . .	538
9.17 Lieu géométrique . . . . .	541
9.18 Exercices . . . . .	542
<b>10 MAXIMUM ET MINIMUM</b>	<b>579</b>
10.1 Problèmes d'extremums et transformations géométriques . . . . .	579
10.2 Problèmes d'extremums et inégalités algébriques . . . . .	586
10.3 Problèmes d'extremums et combinatoire . . . . .	590
10.4 Exercices . . . . .	595
<b>11 INVERSIONS</b>	<b>597</b>
11.1 Inversion . . . . .	597
11.1.1 Exercices . . . . .	603
11.2 Pôles et polaires . . . . .	606
11.3 $\sqrt{bc}$ -inversion . . . . .	612
11.3.1 Exercices . . . . .	613
11.4 Exercices . . . . .	616
<b>12 GÉOMÉTRIE PROJECTIVE</b>	<b>625</b>
12.1 Plan projectif, birapport et division harmonique . . . . .	625
12.1.1 Exercices . . . . .	631
12.1.2 Faisceau harmonique . . . . .	634
12.1.3 Exercices . . . . .	640
12.2 Pôle et polaire . . . . .	643
12.3 Exercices . . . . .	649

<b>13 GÉOMÉTRIE ET COMBINATOIRE</b>	<b>653</b>
13.1 Dénombrement . . . . .	653
13.1.1 Dénombrer des points . . . . .	653
13.1.2 Dénombrer des droites . . . . .	657
13.1.3 Formule d'Euler. Dénombrer des régions . . . . .	658
13.1.4 Dénombrer des figures . . . . .	662
13.2 Principe des tiroirs et géométrie . . . . .	663
13.3 Théorème de Helly et applications . . . . .	669
13.4 Théorème de Krasnosel'skii . . . . .	674
13.5 Exercices . . . . .	676