

Table des Matières

Avant-propos	i
1 Principes de la Mécanique	1
1.1 Mouvement mécanique	1
1.2 Représentations mathématiques	4
1.3 Lois intégrales et lois différentielles	5
1.4 Lois fondamentales du mouvement	5
1.4.1 Force ; Première loi de Newton	5
1.4.2 Seconde loi de Newton	6
1.4.3 Troisième loi de Newton	7
1.4.4 Principe de relativité de Galilée	7
1.5 La mécanique analytique	8
1.6 Conceptions de la mécanique classique	10
1.6.1 Les grandeurs physiques et leurs continuités	10
1.6.2 Déterminisme Laplacien	10
1.6.3 Méthode Analytique	11
1.7 Au delà de la mécanique classique	11
2 Mécanique du Point Matériel	13
2.1 Cinématique du point matériel	13
2.1.1 Trajectoire, vitesse et accélération	13
2.1.2 Mouvement curviligne	14
2.2 Dynamique du point matériel	18
2.3 Dynamique d'une masse variable	20
2.4 Principes et théorèmes de base	21
2.4.1 Moment et couple	21
2.4.2 Travail et théorème des forces vives	21
2.4.3 Energie mécanique ou intégrale des forces vives	22
2.5 Mouvement lié	24
2.5.1 Mouvement sur une surface	24
2.5.2 Mouvement sur une ligne	28
2.6 Positions d'équilibre stables et instables	29
2.7 Intégration des équations du mouvement	30
2.7.1 Lois du mouvement	30
2.7.2 Diagrammes de potentiels	31
2.7.3 Théorie des perturbations	32
2.8 Transformations du mouvement	34
2.8.1 Mouvement absolu, relatif et d'entraînement	34

2.8.2	Mouvement dans un repère mobile	37
2.8.3	Théorème des forces vives pour le mouvement relatif	38
2.8.4	Chute d'un point matériel sur la terre	38
2.8.5	Le pendule de Foucault	40
3	Mécanique des Systèmes	43
3.1	Mouvements simples d'un solide	43
3.2	Distribution des vitesses dans un solide en mouvement	45
3.3	Forces extérieures, intérieures, actives et de réaction	46
3.4	Dynamique des systèmes	47
3.4.1	Centre de masse; Mouvement du centre de masse	47
3.4.2	Mouvement par rapport au centre de masse	49
3.4.3	Moment angulaire	49
3.4.4	Loi fondamentale de la dynamique du mouvement de rotation	49
3.4.5	Théorème des forces vives; Conservation de l'énergie mécanique	50
3.5	Mouvement d'un système lié	51
3.6	Solides indéformables	53
3.6.1	Moment d'inertie et rayon de giration	53
3.6.2	Théorème des axes perpendiculaires	54
3.6.3	Théorème de Huygens	55
3.6.4	Produits d'inertie et ellipsoïde d'inertie	56
3.6.5	Moment angulaire du solide	57
3.6.6	Energie cinétique de rotation du solide	58
3.6.7	Axes principaux d'inertie	59
3.7	Les angles d'Euler	61
3.8	Les équations dynamiques d'Euler	64
3.9	Toupie symétrique en l'absence de force extérieure	65
3.10	Mouvement d'Euler	67
3.10.1	Interprétation de Poinsot	68
3.10.2	Intégration des équations du mouvement	70
4	Champ Central et Mécanique Céleste	75
4.1	Problème à N corps	76
4.1.1	$N = 2$	76
4.1.2	$N > 2$	77
4.2	Champ et potentiel gravitationnels	78
4.2.1	Théorème de Gauss	80
4.2.2	Les équations de Poisson et de Laplace	82
4.2.3	Calcul du champ gravitationnel créé par une distribution de masses	82
4.2.4	Champ gravitationnel créé par une sphère homogène	82
4.2.5	Méthode de résolution de l'équation de Laplace	85
4.2.6	Energie potentielle d'une distribution de masse	94
4.3	Mouvement dans un champ central	96
4.3.1	Loi des aires	96
4.3.2	Potentiel effectif	97
4.3.3	Condition de stabilité	98
4.3.4	Trajectoire dans un champ central	98
4.4	Problème de Kepler	100
4.4.1	Champ de gravitation newtonien	100
4.4.2	Perturbation du mouvement des planètes	104

4.4.3	Champ répulsif	106
4.5	Vecteur de Laplace-Runge-Lenz	107
4.6	Théorème de Bertrand sur les orbites fermées	108
4.7	Problème de diffusion élastique des particules	109
5	Mécanique d'Euler-Lagrange	113
5.1	Liaisons mécaniques ; Degrés de Libertés	113
5.1.1	Types de liaisons	114
5.1.2	Méthode de Lagrange de définition des liaisons	115
5.1.3	Extension aux systèmes non-holonômes	115
5.2	Espace de configuration du système lié	116
5.2.1	Interprétation géométrique	117
5.2.2	Extension en vitesses	117
5.3	Déplacements virtuels	119
5.3.1	Liaisons parfaites et principe des déplacements virtuels	119
5.3.2	Méthode de résolution	120
5.3.3	Equations d'équilibre avec multiplicateurs	121
5.4	Principe d'Euler-Lagrange	125
5.4.1	Principe de d'Alembert	125
5.4.2	Equation générale de la dynamique	126
5.4.3	Equations de la dynamique avec multiplicateurs	126
5.5	Equations d'Euler-Lagrange	129
5.5.1	Forces généralisées ; Systèmes holonômes	129
5.5.2	Conditions d'équilibre en coordonnées généralisées	131
5.5.3	Dérivation des équations d'Euler-Lagrange	132
5.5.4	Extension aux systèmes non-holonômes	134
5.5.5	Méthode de résolution	135
5.6	Mouvement dans un champ électromagnétique	138
5.7	Fonction dissipative de Rayleigh	141
5.8	Vibrations Mécaniques	142
5.8.1	Stabilité d'un système au voisinage d'une position d'équilibre	142
5.8.2	Stabilité au voisinage d'un état stationnaire	144
5.8.3	Système à un seul degré de liberté	144
5.8.4	Système à plusieurs degrés de liberté	149
6	Principe Variationnel	153
6.1	Calcul des variations	153
6.2	Exemples simples de calcul des variations	156
6.2.1	Problème de Bernoulli	156
6.2.2	Surface maximale (contraintes intégrales)	157
6.3	Action d'Hamilton	158
6.4	Propriétés de la fonction de Lagrange	160
6.5	Relativité de Galilée	162
6.5.1	Point matériel libre	162
6.5.2	Système de points matériels et système non-fermé	163
6.6	Principe de moindre temps	164
6.7	Formulation lagrangienne de la relativité restreinte	165
6.7.1	Les principes fondamentaux de la relativité restreinte	166
6.7.2	Notion d'intervalle	167
6.7.3	Transformation de Lorentz	168

6.7.4	Quadrivecteur et produit scalaire	170
6.7.5	Temps propre	170
6.7.6	Transformation des vitesses	170
6.7.7	Lagrangien relativiste	171
6.8	Impulsions généralisées	173
6.9	Mouvement dans un référentiel non-galiléen	175
7	Lois de symétrie et intégrales du mouvement	177
7.1	Conservation de l'énergie	177
7.2	Conservation de l'impulsion	180
7.3	Conservation du moment angulaire	182
7.4	Théorèmes de Noether	184
7.4.1	Premier théorème de Noether	186
7.4.2	Deuxième théorème de Noether	187
7.4.3	Exemples	187
8	Mécanique d'Hamilton	191
8.1	Transformation de Legendre	191
8.1.1	Fonction à deux variables	192
8.1.2	Fonction à $2n$ variables	193
8.2	Hamiltonien ; Equations d'Hamilton	194
8.3	Forme symplectique des équations d'Hamilton	197
8.4	Equations d'Hamilton par un principe variationnel	198
8.5	Coordonnées cycliques et méthode de Lagrange	200
8.6	Méthode de réduction de Routh	202
8.7	Principe de Maupertuis	204
9	Transformations canoniques	209
9.1	Transformations de coordonnées	209
9.2	Equations de transformations canoniques	210
9.2.1	Transformations du type I	212
9.2.2	Transformations du type II	213
9.2.3	Transformations du type III	215
9.2.4	Transformations du type IV	216
9.3	Propriétés des transformations canoniques	217
9.4	Approche symplectique	220
9.5	Quelques applications des transformations canoniques	224
9.6	Temps comme une variable dynamique	230
9.7	Fonction génératrice d'une rotation infinitésimale	232
9.8	Transformations infinitésimales ou de contacts	233
9.9	Rôle de la fonction d'action S	236
9.10	Théorème de Poincaré	240
9.11	Théorème de Liouville	241
9.12	Equation de Liouville : lien avec la physique statistique	242
9.12.1	Densité d'état	242
9.12.2	Equation de Liouville	242
9.12.3	Equation de continuité dans l'espace	244
9.13	Analogie entre la mécanique et l'optique	245
9.13.1	Propagation des ondes électromagnétiques	245
9.13.2	Mécaniques des ondes	247

9.13.3	Au delà de la mécanique	248
9.13.4	Equation de Schrödinger	249
9.14	Perturbation des systèmes hamiltoniens	250
9.14.1	Méthode de Lagrange	250
9.14.2	Méthode de Poincaré	253
9.14.3	Exemple: Problème à trois corps	254
9.14.4	Méthode mixte	258
10	Systèmes à Grand Nombre de Particules	259
10.1	Distribution de Maxwell	259
10.2	Fonction de distribution	261
10.3	Distribution de Boltzmann	261
10.4	Théorème du viriel	263
10.5	Approximation du champ moyen	265
10.6	Distribution de Gibbs	265
10.6.1	Energie libre; Intégrale des états	267
10.6.2	Equation d'état	267
10.6.3	Equation de Gibbs-Helmhotz	268
10.6.4	Entropie et sens statistique	268
10.6.5	Loi des gaz parfaits	268
10.7	Théorème de l'équipartition de l'énergie cinétique	269
10.8	Hiérarchie BBGKY	271
10.8.1	Equations d'évolution	272
10.8.2	Equation de Vlasov	274
10.8.3	Equations locales de conservation de la masse	274
11	Crochets de Poisson et Invariants canoniques	277
11.1	Crochets de Poisson	277
11.1.1	Définition	277
11.1.2	Invariance des crochets de Poisson	279
11.1.3	Propriétés des crochets de Poisson	280
11.1.4	Crochet de Poisson de champs de vecteurs	282
11.2	Equations du mouvement	284
11.3	Structure de Poisson généralisée	287
11.4	Propriétés des intégrales du mouvement	288
11.5	Lien entre invariants et propriétés de symétrie	290
11.6	Forces centrales et crochets de Poisson	292
11.7	Crochets de Lagrange	294
11.8	Invariants Intégraux de Poincaré	296
11.9	Théorème d'Arnold-Liouville	297
12	Théorie d'Hamilton-Jacobi	299
12.1	Equation d'Hamilton-Jacobi	299
12.1.1	Représentation en coordonnées	299
12.1.2	Représentation en impulsions	302
12.1.3	Exemples	302
12.1.4	Problème inverse	307
12.2	Les systèmes conservatifs et action de Maupertuis	307
12.3	Séparation des variables dans l'équation d'Hamilton-Jacobi	311
12.3.1	Définitions	311

12.3.2	Quelques techniques de séparation des variables	312
12.3.3	Théorème de Liouville	314
12.3.4	Conditions de Staeckel	314
12.3.5	Mouvement en coordonnées cartésiennes	316
12.3.6	Mouvement en coordonnées polaires	317
12.3.7	Mouvement en coordonnées sphériques	320
12.3.8	Mouvement en coordonnées paraboliques	323
12.3.9	Mouvement en coordonnées elliptiques	325
12.3.10	Oscillateur harmonique avec une fréquence $\frac{\omega}{t^2}$	327
12.3.11	Chaîne de Toda	328
12.4	Variables canoniques angles-actions	330
12.4.1	Variables action-angle dans les systèmes à seul degré de liberté	330
12.4.2	Exemples	333
12.4.3	Variables action-angle pour les systèmes séparables	334
12.4.4	Mouvement quasi-périodique	335
12.5	Problème de Kepler - Variables Action-Angle	337
12.6	Quantification des variables d'action	340
13	Introduction aux milieux continus et champs	341
13.1	Exemple de passage d'un système discret vers un système continu: Vibration dans solide unidimensionnel	341
13.2	Méthode de résolution des équations d'onde	343
13.3	Formulation lagrangienne des milieux continus	344
13.4	Equations d'Euler-Lagrange pour les champs	344
13.5	Transformation de jauge	347
13.6	Dérivées fonctionnelles	347
13.7	Electrodynamique classique	349
13.8	Tenseur impulsion-énergie d'un champ	352
13.9	Fonctionnelle de Rayleigh	354
13.10	Hamiltonien fonctionnelle	356
13.11	Equations d'Hamilton fonctionnelles	357
13.12	Crochets de Poisson	359
	Liste des figures	361
	Bibliographie	363
	Index	365