AVANT-PROPOS

Cet ouvrage propose l'intégralité des annales en mathématiques, informatique commune (IPT) et option informatique des concours passés par le plus grand nombre d'étudiants de CPGE MP (Mines, Centrale, CCP, E3A) entre 2015 et 2017. Afin que la préparation aux concours soit optimale, ce livre propose :

- le sujet original proposé aux candidats du concours pour chaque épreuve, chaque concours et chaque année ;
- les diverses thématiques abordées par ce sujet ;
- un corrigé détaillé ;
- des commentaires associés aux différentes questions : nature de la question (ouverte, fermée, cours, etc), niveau de difficulté (élémentaire, difficile, etc),compétences attendues (autonomie, initiative, technique, etc), réussite des candidats ayant réellement passé cette épreuve en se basant sur les rapports de jury.

La réussite à un concours ne se résume pas à travailler de nombreux sujets, à analyser ses erreurs grâce à un corrigé (même très bien fait) et à lire des commentaires. Il consiste aussi à se rendre compte des bonnes et mauvaises pratiques sur des cas réels. C'est pour cela que j'ai sélectionné soigneusement quatre sujets portant sur les quatre concours que couvre ces annales :

- Mines-Ponts informatique commune (IPT) 2016 (page 843) ;
- Concours Communs Polytechniques Math 1 2016 (page 853) ;
- Centrale-SupElec option informatique 2016 (page 873) ;
- E3A option informatique 2016 exercice 2 (page 891).

Pour chacun de ces sujets, j'ai choisi tout aussi soigneusement les questions les plus pertinentes (celles traitées par un nombre significatif de candidats et qui peuvent être données dans tous les autres concours et dont les compétences attendues ou les pièges habituels se rencontrent dans tous les autres concours). Pour chacune de ces questions, vous trouverez une ou plusieurs réponses données par des étudiants de la filière MP-MP*. Pour chacune de ces réponses, je propose une analyse de la copie du point de vue du correcteur de cette épreuve et je propose une plage de points que pourrait se voir attribuer cette réponse au concours. L'analyse précise de ces copies d'étudiants permet au candidat :

- d'observer des rédactions réelles sur une quinzaine d'étudiants différents ;
- de comprendre les attentes d'un correcteur de concours ;
- de connaitre les niveaux de rigueur attendu selon le type de question ;
- de comparer la qualité et la clarté de rédaction ;
- de réaliser qu'une note peut augmenter ou diminuer significativement en la modifiant assez peu (d'où l'importance de la rédaction optimale).

Je remercie mes étudiants de MP1 de l'année 2016-2017 pour leurs participations à cet ouvrage.

Conseils pour rationnaliser et optimiser la préparation de l'écrit

La préparation de l'écrit commence ... dès le début de l'année et se prépare régulièrement (d'où le terme CPGE : classe PRÉPRATOIRE aux grandes écoles).

PREMIÈRE ÉTAPE

Il faut construire un système de fiches pour chaque chapitre (de première et seconde année). Chaque fiche doit être courte (2 à 4 pages maximum, si possible sous forme de fiches bristol ou d'un cahier de primaire i.e. de petit format) et contenir les éléments les plus importants du chapitre (définitions et théorèmes importants avec leurs hypothèses et conclusions bien identifiées). Il est important de compendre que :

- les définitions sont importantes car il s'agit des outils avec lesquels on veut travailler (par exemple, injectivité, série convergente, algorithme de tri ou notion de pile (informatique commune), arbre binaire de recherche (option informatique) etc.) ;
- les théorèmes (ou propositions ou lemmes) sont importants car ils sont les méthodes qui permettent d'utiliser les objets primitifs formant les définitions et de les manipuler effectivement. Par exemple, si f est linéaire alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$ ou bien un théorème de comparaison : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et la série $\sum_n v_n$ converge alors la série $\sum_n u_n$ converge ou la complexité des différents tris (informatique commune) ou l'automate reconnaissant l'intersection de deux langages reconnus par des automates (option informatique) ;
- dans les raisonnements complexes (typiquement ceux des concours), il y a une inter-action permanente entre les définitions et les théorèmes. Par exemple, pour montrer qu'une suite $(u_n)_n$ est convergente, on utilise le lien suite-série : $(u_n)_n$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ converge. Pour étudier la convergence de la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$, on étudie par exemple son absolue convergence (théorème : convergence absolue entraine convergence), on utilise les théorèmes de comparaison (cf. item précédent), on conclut à la convergence absolue donc à la convergence de la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ donc à la convergence de la suite $(u_n)_n$. Pour écrire un algorithme de tri (informatique commune ou option informatique) sur des données qui ne sont plus des nombres (par exemple, des chaines de caractères ou des couples (pays, nombre d'infectés)) mais des entités possédant un ordre, on modifie un algorithme de tri du cours afin de tenir compte du nouvel ordre. L'analyse de sa complexité découle également d'une modification de la complexité du tri analogue sur les nombres ;

Ce travail est important : outre qu'il permet d'accéder rapidement et simplement aux éléments clés de chaque chapitre (ce qui sera un élément déterminant lors de la préparation des écrits), il vous force à effectuer une synthèse régulière des connaissances qui vous ont été enseignées et donc à cristalliser vos connaissances sur un thème précis. Si vous avez du mal à en produire, discutez en avec vos camarades et/ou vos professeurs.

DEUXIÈME ÉTAPE

Il faut apprendre régulièrement son cours, précisément ses définitions et théorèmes fondamentaux en premier lieu (avec précision en distinguant les hypothèses des conclusions et en n'oubliant pas les quantificateurs). Puis, si possible apprendre les preuves et/ou les programmes associés. Dans le doute, il s'agit probablement des questions de cours pour les colles de maths et pour l'informatique, il s'agit des preuves et programmes inclus dans le cours (pas ceux des séances de travaux dirigés ou de travaux pratiques ou de devoirs) et inscrits au programme officiel (par exemple, les algorithmes de tri, leurs complexités, leurs corrections ainsi que leurs programmations).

L'intégralité des rapports de concours (e3a, CCP, Centrale-SupElec, Mines-Ponts, X-ENS) indique depuis de nombreuses années l'importance de la connaissance du cours (que cela soit en mathématique, informatique commune (IPT) ou option informatique) et de la maitrise de ces points fondamentaux. Il s'avère dans la pratique qu'il s'agit du premier critère de discrimination des candidats aux concours (tant aux écrits qu'aux oraux). Si vous ne savez pas ce qu'est un point fondamental, soyez pragmatique : si ce point est utilisé régulièrement au cours de l'année (cours, exercice, devoir libre, devoir surveillé), c'est qu'il est important. Sinon, discutez en avec des camarades ou vos professeurs.

Cette connaissance précise du cours vous octroiera une agilité certaine lors des écrits et vous permettra de vous adapter bien plus facilement à des situations variées et nouvelles.

TROISIÈME ÉTAPE

Lorsque l'on travaille un sujet d'écrit, on commence par disposer de l'intégralité de ces fiches de révisions ou bien de son cours ou bien d'une référence (un manuel par exemple). Au début, je vous déconseille de travailler 3 ou 4h sur un sujet. Il est préférable de fractionner le travail en paquet d'une ou deux heures (pas plus) correspondant à une ou deux parties (pas plus) ou à une sélection pré-déterminée de questions (10 au plus). Pensez à lire toutes les questions, à indiquer les questions qui vous semblent accessibles afin d'y réfléchir en priorité (mettre son énergie en priorité sur ce qui est accessible, au bout de 2h, vous aurez moins d'énergie et vous serez moins lucide).

Pour chaque question que vous traitez, commencez par vous demander à quel(s) chapitre(s) ou notion(s) se rattache(nt) la question. Si vous connaissez la démarche à suivre pour y répondre (définition, théorème, méthode, algorithme ou programme), suivez là. Si vous avez des doutes, n'hésitez pas un instant à vous référer à vos fiches (ou cours ou manuel) pour récupérer les informations adéquates puis répondre à la question. En tout cas, si à l'issue d'au plus 10 mn, vous n'avez pas démarrer la résolution de la question ou si vous êtes sur la même question depuis 20 mn, changer impérativement de question (le temps fait partie de l'équation aux concours). Vous y reviendrez ultérieurement s'il vous reste du temps.

Pensez à rédiger comme aux concours avec précision, clarté, rigueur et en encadrant ou soulignant la réponse (vous vous entrainez pour cela et ceci ne s'apprend pas le jour du concours). Si vous êtes trompé, rayez par un seul trait oblique l'intégralité de votre erreur et écrivez en dessous (surtout ne pas effacer et écrire dessus, cela fait toujours des copies très sales). L'objectif est de produire une réponse de qualité (clarté, propreté, précision) qui sera un élément clé de l'évaluation par les correcteurs (cf. les analyses de copies d'étudiants à partir de la page 843)

CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE I.

I.1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer sa fonction génératrice, puis en déduire son espérance et sa variance.

EXERCICE II.

On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

II.1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Que vaut alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right)$?

II.2. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$?

II.3. Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x\right)$.

PROBLEME.

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a,b]$: si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

Partie 1. Exemples et contre-exemples

III.1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par : $\quad \forall x \in\,]0,1]\,, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x}.$

Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0,1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

III.2. Soit N entier naturel non nul, on note $\mathscr{P}_N$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales sur $[a,b]$, de degré inférieur ou égal à N. Justifier que $\mathscr{P}_N$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

III.3. Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}[X],\ N_1(P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x\in[1,2]} |P(x)|.$$

III.3.a. Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.

III.3.b. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2,2]$ ainsi :

pour tout $x \in [-2,-1]$, $f(x) = x^2$, pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = 1$ et pour tout $x \in [1,2]$, $f(x) = x^3$.

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2,2]$.

Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2.

Partie 2. Application : un théorème des moments

III.4. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout entier naturel k,
$\int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \left(\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x \text{ est le moment d'ordre } k \text{ de } f \text{ sur } [a,b]\right)$.

III.4.a. Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x$?

III.4.b. Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle. On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : si (g_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g sur une partie I de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction bornée sur I, alors la suite de fonctions $(f.g_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $f.g$.

III.5. Application
Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple $(f,\, g)$ d'éléments de E par $(f\,|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a,b]$ et $F^\perp$ l'orthogonal de F. Déterminer $F^\perp$. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

III.6.

III.6.a. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$. Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre I_{n+1} et I_n et démontrer que, pour tout n non nul, $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

III.6.b. En déduire que, pour tout entier naturel k, $\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

III.6.c. Proposer une fonction f continue sur $[0,+\infty[$, non nulle et vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } k,\ \int_0^{+\infty} u^k f(u)\mathrm{d}u = 0.$$

III.6.d. Expliquer pourquoi la fonction f proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $[0,+\infty[$ par une suite de polynômes.

Partie 3. Exemple via un théorème de Dini

III.7. Question préliminaire
Soit $x \in [0,1]$, on note $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t \in I$, $g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence valable pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left(x - (u_n)^2\right) = g_x(u_n).$$

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer, en fonction du réel x, sa limite.

III.8. Proposer un exemple de suite (f_n) de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement mais non uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f qui est continue. Il sera possible de s'appuyer sur une représentation graphique sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on pourra admettre le résultat suivant. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f elle même continue sur $[a,b]$. Si la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire : pour tout entier naturel n et pour tout $t \in [a,b]$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

III.9. Application
Soit (P_n) la suite de fonctions polynômes définie par :

$$P_0(x) = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right).$$

III.9.a. Justifier que la suite (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

III.9.b. Démontrer que la suite (P_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

Partie 4. Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

Dans toute cette partie, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0,1]$.
On pose : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

III.10. Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.

III.10.a. Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $P\left(|S_n - nx| > n\alpha\right) \leq \dfrac{1}{4n\alpha^2}$.

III.10.b. Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x).$$

III.11.

III.11.a. Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(a,b) \in [0,1]^2$, $|a-b| \leq \alpha$ entraîne $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$.

III.11.b. Justifier que $\left| \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k) \right| \leq 2\,\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.

III.11.c. Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout réel $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$, puis conclure.

Fin de l'énoncé

SOLUTION

I.1. Par définition, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ donc la fonction

$$G_X : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\, t^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{t\lambda} = e^{-\lambda + t\lambda} = e^{\lambda(t-1)}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ (*la série exponentielle admet un rayon de convergence infini*). Cette fonction est clairement de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ donc $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$ existent. Ainsi, X admet une espérance et une variance et l'on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= G'_X(1) = \lambda, \quad V(X) \underset{\text{Huyguens}}{\overset{\text{Koenig}}{=}} E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\ &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

Commentaires : *Il s'agit d'une question de cours mais qui s'avère très discriminante. C'est probablement le but de la question pour récompenser les candidats ayant travaillé en profondeur leur cours. En raison du « en déduire », Il est fort probable qu'aucun point ne fut attribué à l'espérance et la variance s'ils ne sont pas calculés via la fonction génératrice.*

II.1. Puisque n et $2n$ sont strictement positifs, on est assuré que les fonctions $x \mapsto e^{-nx}$ et $x \mapsto e^{-2nx}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Ceci assure l'intégrabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+$ (combinaison linéaire de fonctions intégrables) donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n} - \frac{2e^{-2nx}}{-2n}\right]_{x=0}^{x \to +\infty} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n} = 0.$$

Il est immédiat que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx\right) = 0.$

Commentaires : *Beaucoup de candidats utilisent des théorèmes de comparaison pour justifier l'intégrabilité alors que les fonctions $x \mapsto e^{ax}$ sont au programme d'intégration, ce qui simplifie grandement l'argumentaire.*

II.2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{-nx} = \sum_{n\geqslant 1} \left(e^{-x}\right)^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{-2nx} = \sum_{n\geqslant 1} \left(e^{-2x}\right)^n$ convergent (séries géométriques de raisons respectives e^{-x} et e^{-2x} qui appartiennent à $]-1, 1[$) donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge (combinaison linéaire de séries convergentes). En outre, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\, dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-2x}\right)^n = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - 2 \times \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \\ &= \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{2e^{-x}e^{-x}}{(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \left(1 - \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right) \\ &= \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \left(\frac{1 + e^{-x} - 2e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \left(\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}. \end{aligned}$$