Chapitre I

Rappels
Théorie de la machine électrique généralisée

L'établissement et l'étude des modèles mathématiques des machines électriques ouvrent de grandes perspectives de recherche des convertisseurs électromagnétiques. La possibilité de remplacer un dispositif réel par son modèle mathématique comprend beaucoup d'avantages dans le domaine de la recherche des machines électriques.

Mathématiquement, les machines électriques sont représentées par des modèles entrées-sorties sous la forme de fonction de transfert ou encore sous forme standard d'équations en variables d'état. Il existe des méthodes générales qui conduisent à des équations dont le développement nécessite souvent des calculs importants, mais qui rendent compte correctement du comportement des machines tournantes dans la majorité des cas.

Ces méthodes s'appliquent à toutes les machines électriques : à courant continu ou à courant alternatif, qui réalisent un transfert d'énergie par l'intermédiaire de circuits couplés ; elles mettent en relief l'analogie qui existe entre les divers types de machines, et permettent de traiter au moyen d'un même système d'équations, aussi bien les régimes transitoires, que les régimes permanents.

Cependant, l'étude des régimes transitoires des machines électriques tournantes s'accommode d'une moindre rigueur numérique que l'étude des régimes permanents établis. Pour cette raison, on adopte des hypothèses simplificatrices qui, tout en permettant de simplifier notablement les calculs, conduisent à des résultats suffisamment précis pour la plupart des applications.

1. MACHINE ELECTRIQUE IDEALISEE

La machine électrique idéalisée est une machine électrique ayant les hypothèses suivantes [1,], [2]:

- l'entrefer est d'épaisseur uniforme et l'effet d'encochage est négligeable;
- la saturation du circuit magnétique , l'hystérésis et les courants de Foucault sont négligeables;
- les résistances des enroulements ne varient pas avec la température et l'effet de peau n'est pas pris en compte.

De plus, il est admis que la f.m.m créée par chacune des phases des deux armatures est à répartition sinusoïdale.

Parmi les conséquences importantes de ces hypothèses, on peut citer [3], [4]:

- l'additivité des flux;
- la constance des inductances propres;
- la loi de variation sinusoïdale des inductances mutuelles entre les enroulements du stator et du rotor en fonction de l'angle électrique de leurs axes magnétiques.

2. MACHINE ELECTRIQUE GENERALISEE DANS LE REPERE NATUREL

En général, on utilise l'un des deux modèles de la machine électrique généralisée:

1. Modèle triphasé ;
2. Modèle biphasé.

2.1. Modèle triphasé de la machine généralisée.

La machine électrique triphasée est constituée d'un stator et d'un rotor mobile. Le stator possède trois enroulements couplés en étoile ou en triangle qui sont alimentés par un système triphasé de tensions. Il en résulte la création d'un champ magnétique dans l'entrefer de la machine.
La machine électrique généralisée triphasée est une machine bipolaire triphasée idéale, avec six enroulements (trois sur le stator et trois sur le rotor, (fig. I.1a).

La figure (I.1a) rappelle la position des axes des phases statoriques et rotoriques dans l'espace électrique.

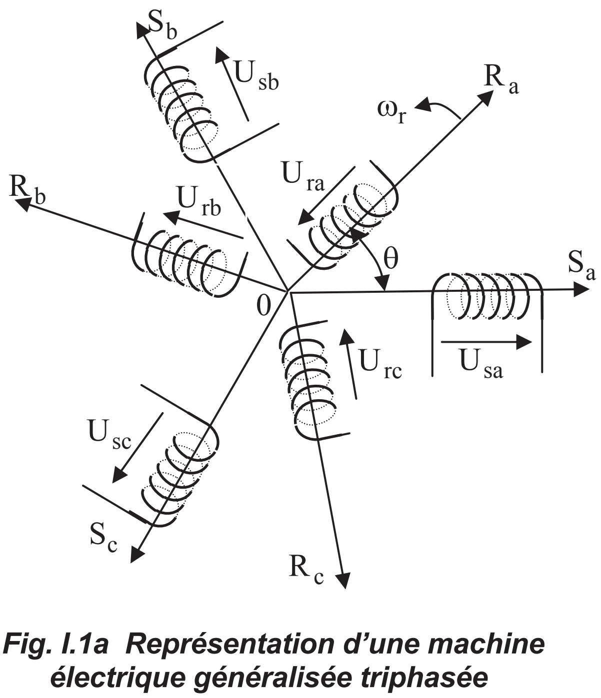

Fig. I.1a Représentation d'une machine électrique généralisée triphasée

En général, l'équation ci-dessous exprime la relation entre la tension aux bornes d'une bobine parcourue par un courant i de résistance R, d'inductance L et d'une variation du flux :

$$U = R\,i + \frac{d\psi}{dt} \; ; \qquad (I.1)$$

D'après les hypothèses simplificatrices, tous les coefficients d'inductance propre sont constants et les coefficients d'inductance mutuelle ne dépendent que de la position des enroulements.

Pour ce modèle, on peut écrire les équations des tensions représentant pour chaque enroulement la somme de la chute ohmique et la chute inductive liée au flux.

Pour le stator :

$$\begin{cases} U_{sa} = R_s i_{sa} + \dfrac{d\psi_{sa}}{dt} \\ U_{sb} = R_s i_{sb} + \dfrac{d\psi_{sb}}{dt} \\ U_{sc} = R_s i_{sc} + \dfrac{d\psi_{sc}}{dt} \end{cases} \quad \text{(I.2)}$$

Pour le rotor :

$$\begin{cases} U_{ra} = R_r i_{ra} + \dfrac{d\psi_{ra}}{dt} \\ U_{rb} = R_r i_{rb} + \dfrac{d\psi_{rb}}{dt} \\ U_{rc} = R_r i_{rc} + \dfrac{d\psi_{rc}}{dt} \end{cases} \quad \text{(I.3)}$$

où

U_{sa}, U_{sb}, U_{sc} et U_{ra}, U_{rb}, U_{rc} - les tensions simples triphasées, respectivement, au stator et au rotor de la machine ;

i_{sa}, i_{sb}, i_{sc} et i_{ra}, i_{rb}, i_{rc} - les courants au stator et au rotor de la machine ;

$\psi_{sa}, \psi_{sb}, \psi_{sc}$ et $\psi_{ra}, \psi_{rb}, \psi_{rc}$ - les flux propres circulants, respectivement, au stator et au rotor de la machine ;

R_s et R_r - les résistances des enroulements statorique et rotorique.

Les expressions des flux sous forme matricielle sont :

$$\begin{pmatrix} \psi_{sabc} \\ \psi_{rabc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [L_s] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_r] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sabc} \\ i_{rabc} \end{pmatrix}; \quad \text{(I.4)}$$

où

$$[L_s] = \begin{vmatrix} l_s & m_s & m_s \\ m_s & l_s & m_s \\ m_s & m_s & l_s \end{vmatrix} = l_s \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} ; \quad [L_r] = \begin{vmatrix} l_r & m_r & m_r \\ m_r & l_r & m_r \\ m_r & m_r & l_r \end{vmatrix} = l_r \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

avec :

l_s et l_r - les inductances propres statorique et rotoriques;

m_s et m_r - les inductances mutuelles statorique et rotorique, avec

$$m_s = -\frac{l_s}{2} \text{ et } m_r = -\frac{l_r}{2}.$$

L'inductance mutuelle entre le stator et le rotor est définie par :

$$[M_{sr}] = M_{max}\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & \cos(\theta) & \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

où M_{max} représente la valeur maximale des coefficients d'inductance mutuelle stator–rotor obtenue lorsque les bobinages sont en vis à vis.

2.2. Modèle biphasé de la machine électrique généralisée

Ce modèle est le plus utilisé dans le cas d'une machine symétrique.
La machine électrique généralisée biphasée est une machine bipolaire, biphasée idéale avec deux enroulements au stator et deux enroulements au rotor (fig. I.1b).

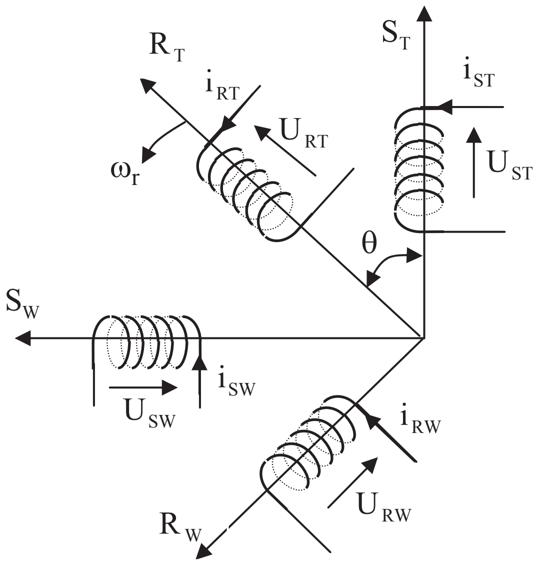

Fig.1.1b Représentation d'une machine biphasée généralisée

En plus des équations de tensions on peut écrire l'équation caractérisant la position angulaire entre le stator et le rotor :

$$\theta = \int \omega_r dt \qquad \text{(I.5)}$$

θ - caractérise la position angulaire du rotor par rapport au stator.

Du modèle de la machine généralisée biphasée, on peut obtenir n'importe quel modèle de la machine électrique. En considérant le modèle biphasé de la machine généralisée (fig. I.1b), on peut écrire les équations de Kirchoff pour chaque élément:

$$\begin{cases} U_{ST} = r_S i_{ST} + \dfrac{d\psi_{ST}}{dt} \\ U_{SW} = r_S i_{SW} + \dfrac{d\psi_{SW}}{dt} \\ U_{RT} = r_R i_{RT} + \dfrac{d\psi_{RT}}{dt} \\ U_{RW} = r_R i_{RW} + \dfrac{d\psi_{RW}}{dt} \end{cases} \qquad \text{(I.6)}$$

Dans ces équations, les flux sont de la forme:

$$\begin{cases} \psi_{ST} = L_{ST} i_{ST} + M_{ST-RT} i_{RT} + M_{RT-RW} i_{RW} \\ \psi_{SW} = L_{SW} i_{SW} + M_{SW-RT} i_{RT} + M_{SW-RW} i_{RW} \\ \psi_{RT} = L_{RT} i_{RT} + M_{RT-ST} i_{ST} + M_{RT-SW} i_{SW}\ ; \\ \psi_{RW} = L_{RW} i_{RW} + M_{RW-ST} i_{ST} + M_{RW-SW} i_{SW} \end{cases} \tag{I.7}$$

où r_S, r_r - les résistances des enroulements du stator et du rotor;
$L_{ST}, L_{SW}, L_{RT}, L_{RW}$ - les inductances propres du stator et du rotor;
$M_{ST-RT}, M_{SW-RW}, M_{ST-RW}, M_{RT-SW}$ - les inductances mutuelles entre les phases statoriques et rotoriques.

Pour la machine idéale, on considère :

$$\begin{aligned} L_{ST} &= L_{SW} = L_S \\ L_{RT} &= L_{RW} = L_r \quad ; \end{aligned}$$

Si M est l'inductance mutuelle entre les enroulements du stator et du rotor pour $\theta = 0$, alors on peut écrire:

$$\begin{cases} M_{ST-RT} = M_{SW-RW} = M\cos\theta \\ M_{ST-RW} = M_{RW-ST} = -M\sin\theta \\ M_{RT-SW} = M_{SW-RT} = M\sin\theta \end{cases} \tag{I.8}$$

Pour les flux , on peut écrire:

$$\begin{cases} \psi_{ST} = L_S i_{ST} + M\cos\theta\, i_{RT} - M\sin\theta\, i_{RW} \\ \psi_{SW} = L_S i_{SW} + M\sin\theta\, i_{RT} + M\cos\theta\, i_{RW} \\ \psi_{RT} = L_r i_{RT} + M\cos\theta\, i_{ST} + M\sin\theta\, i_{SW} \\ \psi_{RW} = L_r i_{RW} + M\cos\theta\, i_{SW} - M\sin\theta\, i_{ST} \end{cases} \tag{I.9}$$

Les systèmes d'axes du stator « $S_T\ S_W$ » et du rotor « $R_T\ R_W$ » tournent l'un par rapport à l'autre avec la vitesse angulaire ω_r ; l'angle ϑ dépend de cette vitesse et varie en fonction du temps.

Les systèmes d'équations (I.6) et (I.9) obtenus sont compliqués et dépendent des coefficients variables. Pour simplifier la résolution du système d'équations de départ, on lui fait subir des transformations en remplaçant les grandeurs variables naturelles (courants, flux embrassés et tensions) par d'autres grandeurs variables plus commodes à utiliser; c'est à dire qu'il faut obtenir un système d'équations différentielles avec des coefficients constants. A cet effet, on passe des axes naturels du stator («$S_T\ S_W$» et du rotor « $R_T\ R_W$ ») aux axes réunis (confondus) pour le stator et le rotor « U,V » qui tournent avec une vitesse quelconque ω_{coor} .

Le modèle de cette machine généralisée est représenté sur la figure (I.2)

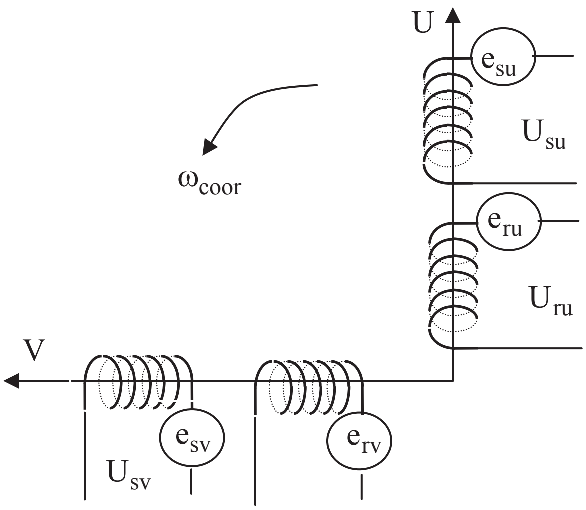

Fig.1.2 Modèle généralisé biphasé selon les axes UV

Le système d'axes de coordonnées tourne avec la vitesse ω_{coor} par rapport au stator et avec la vitesse (ω_{coor}-ω_r) par rapport au rotor. Cependant, il faudrait considérer dans chaque enroulement du stator et du rotor la force électromotrice supplémentaire « e ».

Du moment que le rotor est immobile par rapport au stator, l'inductance mutuelle entre les enroulements du stator et du rotor devient une valeur constante et les coefficients des dérivées des courants sont également constants.

Dans tout ce qui suit, les machines électriques sont considérées symétriques, et par conséquent, il ne sera fait appel qu'au modèle biphasé.

3. TRANSFORMATION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

On représente les grandeurs de chaque enroulement (par exemple i, u, ψ) à l'aide de leurs projections sur les axes "T, W" , (fig.1.3), [3],[4],[5].

$$\begin{aligned} i_T &= i_u \cos(\gamma) - i_v \sin(\gamma) \\ i_W &= i_u \sin(\gamma) + i_v \cos(\gamma) \end{aligned} \tag{I.10}$$

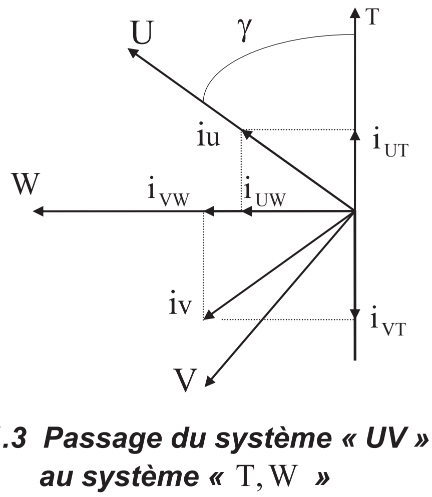

Fig.1.3 Passage du système « UV » au système « T, W »

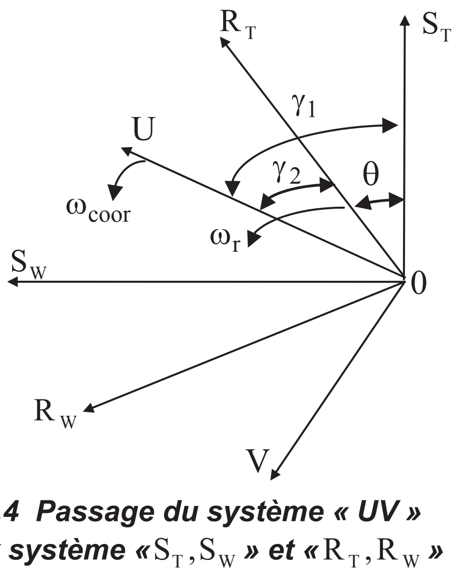

Fig.1.4 Passage du système « UV » aux système « S_T, S_W » et « R_T, R_W »

On procède de la même façon pour les grandeurs tensions U et flux ψ.

Considérons le passage des système d'axes naturels (du stator « S_T, S_W » et du rotor « R_T, R_W ») aux axes réunis « U,V », (fig.1.4). On peut écrire les expressions de U, ψ et i des enroulements statoriques et rotoriques en tenant compte des angles formés par le système « U, V » et le système « S_T, S_W » (γ_1) et avec le système « R_T, R_W » (γ_2) , ainsi que de l'angle θ,

$$\theta = \gamma_1 - \gamma_2 ;$$

Les expressions des courants sont :

$$\begin{cases} i_{ST} = i_{su}\cos(\gamma_1) - i_{sv}\sin(\gamma_1) \\ i_{SW} = i_{su}\sin(\gamma_1) + i_{sv}\cos(\gamma_1) \\ i_{RT} = i_{ru}\cos(\gamma_2) - i_{rv}\sin(\gamma_2) \\ i_{RW} = i_{ru}\sin(\gamma_2) + i_{rv}\cos(\gamma_2) ; \end{cases} \qquad \text{(I.11a)}$$

Aussi aura t-on les expressions des tensions:

$$\begin{cases} U_{ST} = U_{su}\cos(\gamma_1) - U_{sv}\sin(\gamma_1) \\ U_{SW} = U_{su}\sin(\gamma_1) + U_{sv}\cos(\gamma_1) \\ U_{RT} = U_{ru}\cos(\gamma_2) - U_{rv}\sin(\gamma_2) \\ U_{RW} = U_{ru}\sin(\gamma_2) + U_{rv}\cos(\gamma_2) \end{cases} ; \qquad \text{(I.11b)}$$

Par ailleurs, les expressions des flux:

$$\begin{cases} \psi_{ST} = \psi_{su}\cos(\gamma_1) - \psi_{sv}\sin(\gamma 1) \\ \psi_{SW} = \psi_{su}\sin(\gamma 1) + \psi_{sv}\cos(\gamma 1) \\ \psi_{RT} = \psi_{ru}\cos(\gamma_2) - \psi_{rv}\sin(\gamma 2) \\ \psi_{RW} = \psi_{ru}\sin(\gamma 2) + \psi_{rv}\cos(\gamma 2) \end{cases} ; \qquad \text{(I.11c)}$$

Pour déterminer les équations de tensions des enroulements du stator dépendants de l'angle γ_1, les expressions (I.11a), (I.11b) et (I.11c) sont substituées dans (I.6):

$$U_{su}\cos(\gamma_1) - U_{sv}\sin(\gamma_1) = r_s i_{su}\cos(\gamma_1) - r_s i_{sv}\sin(\gamma_1) + \frac{d\psi_{su}}{dt}\cos(\gamma_1) - \psi_{su}\frac{d\gamma_1}{dt}\sin(\gamma_1) - \\ - \frac{d\psi_{sv}}{dt}\sin(\gamma_1) - \psi_{sv}\frac{d\gamma_1}{dt}\cos(\gamma_1) \qquad \text{(I.12)}$$

$$U_{su}\sin(\gamma_1) + U_{sv}\cos(\gamma_1) = r_s i_{su}\sin(\gamma_1) + r_s i_{sv}\cos(\gamma_1) + \frac{d\psi_{su}}{dt}\sin(\gamma_1) + \psi_{su}\frac{d\gamma_1}{dt}\cos(\gamma_1) + \\ + \frac{d\psi_{sv}}{dt}\cos(\gamma_1) - \psi_{sv}\frac{d\gamma_1}{dt}\sin(\gamma_1) \qquad \text{(I.13)}$$

Multiplions (I.12) par $\cos(\gamma_1)$ et (I.13) par $\sin(\gamma_1)$ et additionnons les deux expressions. Après transformation, on obtient:

$$U_{su} = r_s i_{su} + \frac{d\psi_{su}}{dt} - \psi_{sv}\frac{d\gamma_1}{dt}; \qquad (I.14)$$

Multiplions (I.12) par -sin(γ_1) et (I.13) par cos (γ_1) , et additionnons ces expressions :

$$U_{sv} = r_s i_{sv} + \frac{d\psi_{sv}}{dt} + \psi_{su}\frac{d\gamma_1}{dt} \quad ; \qquad (I.15)$$

De la même façon pour les enroulements rotoriques, on obtient:

$$\begin{aligned} U_{ru} &= r_r i_{ru} + \frac{d\psi_{ru}}{dt} - \psi_{rv}\frac{d\gamma_2}{dt} \\ U_{rv} &= r_r i_{rv} + \frac{d\psi_{rv}}{dt} + \psi_{ru}\frac{d\gamma_2}{dt} \quad ; \end{aligned} \qquad (I.16)$$

avec: $\omega_{coor} = \frac{d\gamma_1}{dt}$ - la vitesse angulaire du système d 'axes U, V par rapport au stator immobile;

$(\omega_{coor} - \omega_r) = \frac{d\gamma_2}{dt}$ - la vitesse angulaire du système d'axes U,V par rapport au rotor tournant à la vitesse ω_r.

On obtient le système d'équations différentielles par rapport aux axes U, V tournant à la vitesse ω_{coor} :

$$\begin{cases} U_{su} = r_s i_{su} + \frac{d\psi_{su}}{dt} - \psi_{sv}\omega_{coor} \\ U_{sv} = r_s i_{sv} + \frac{d\psi_{sv}}{dt} + \psi_{su}\omega_{coor} \\ U_{ru} = r_r i_{ru} + \frac{d\psi_{ru}}{dt} - \psi_{rv}(\omega_{coor} - \omega_r) \\ U_{rv} = r_r i_{rv} + \frac{d\psi_{rv}}{dt} + \psi_{ru}(\omega_{coor} - \omega_r) \ ; \end{cases} \qquad (I.17)$$

Les flux embrassés des enroulements sur les axes U,V sont :

$$\begin{cases} \psi_{su} = L_s i_{su} + M i_{ru} \\ \psi_{sv} = L_s i_{sv} + M i_{rv} \\ \psi_{ru} = L_r i_{ru} + M i_{su} \ ; \\ \psi_{rv} = L_r i_{rv} + M i_{sv} \end{cases} \qquad (I.18)$$

avec $L_S = l_s + m_s$ - l'inductance cyclique du stator;

$L_r = l_r + m_r$ - l'inductance cyclique du rotor.