

Table des matières

Avant-propos	ix
1 Un exemple prototype	1
1.1 Connexions sur l'espace tangent à une surface	1
1.2 Courbure d'une connexion	3
1.3 Invariant d'Euler-Poincaré d'une surface compacte	3
1.4 Théorème de Poincaré-Hopf	6
1.5 Faces polygonales sur une surface	10
1.5.1. Courbure géodésique	12
1.5.2. Formule locale de Gauss-Bonnet	13
1.6 Décompositions cellulaires	14
1.6.1. Théorème d'Euler	15
1.6.2. Homologie cellulaire	16
2 Espaces fibrés différentiables	19
2.1 Introduction	19
2.2 Espaces fibrés localement triviaux	20
Orientation et intégration le long des fibres	23
2.3 Fibrés vectoriels	26
2.3.1. Métriques riemanniennes et hermitiennes sur un fibré vectoriel	28
2.3.2. Opérations sur les fibrés vectoriels	28
2.3.3. Fibrés vectoriels holomorphes	30
2.4 Fibrés principaux	31
2.5 Fibrés associés à un fibré principal	34
2.6 Fibrés vectoriels et G -modules	35
2.6.1. Morphismes de G -modules	36
2.6.2. Opérations sur les G -modules	36
2.7 Formes à coefficients dans un fibré vectoriel	36
Formes tensorielles à valeurs dans un G -module	37
2.8 Réduction du groupe structural	40
Réduction généralisée du groupe structural	42
2.9 Systèmes de fonctions de transition	43
Cas d'un fibré principal	44
Cas d'un fibré associé	45
2.10 Revêtements	45
2.11 Espaces projectifs et variétés projectives	47
2.11.1. Espaces fibrés usuels au dessus d'un espace projectif	48
2.11.2. Variétés projectives	49

3	Connexions	53
3.1	Introduction	53
3.2	Connexions sur les fibrés principaux	54
3.2.1.	Espaces horizontaux et transport par parallélisme	54
3.2.2.	Formes de connexion	56
3.2.3.	Une première application aux images réciproques de fibrés par des applications homotopes	58
3.2.4.	Forme de courbure	58
3.2.5.	Différentielle extérieure covariante	60
3.3	Connexions sur les fibrés vectoriels réels	61
3.3.1.	Dérivation covariante sur les fibrés vectoriels réels	61
3.3.2.	Courbure des connexions sur les fibrés vectoriels	65
3.3.3.	Différentielle extérieure covariante des formes à coefficients dans un fibré vectoriel	66
3.4	Connexions sur les espaces homogènes	68
3.4.1.	Espaces homogènes réductifs	68
3.4.2.	Connexions invariantes à gauche	69
3.4.3.	Géométries et connexions de Cartan modelées sur un espace homogène	71
3.5	Connexions sur les fibrés vectoriels complexes	72
3.5.1.	Connexions sur les fibrés vectoriels complexes C^∞	72
3.5.2.	Connexions de type $(1,0)$ sur les fibrés vectoriels holomorphes	74
3.6	Opérations sur les connexions	75
3.6.1.	Images réciproques	75
3.6.2.	Produits fibrés	76
3.6.3.	Sommes de Whitney	76
3.6.4.	Produits tensoriels	77
3.6.5.	Fibrés vectoriels duaux	77
3.7	Holonomie, holonomie restreinte, et courbure	77
3.7.1.	Représentation des groupes d'holonomie dans le groupe struc- tural	78
3.7.2.	Réduction du groupe structural au groupe d'holonomie	79
3.7.3.	Relation entre courbure et holonomie restreinte	80
4	Classe d'Euler et isomorphisme de Thom-Gysin	85
4.1	Introduction	85
4.2	Classe d'Euler des fibrés orientés en sphères	86
4.3	Sections à singularités, classe d'Euler résiduelle, et degré	90
	Cas particulier $n = r$: degré local d'une section	92
4.4	Isomorphisme de Thom-Gysin	94
4.5	Sous-variétés et dualité	97
5	Théorie de Chern-Weil	101
5.1	Introduction	101
5.2	Définition des formes caractéristiques	102
5.3	L'algèbre de Weil	103
5.3.1.	Rappel sur les algèbres différentielles graduées commutatives (adgc et G -adgc)	103
5.3.2.	Les connexions comme morphismes de G -adgc	110

5.3.3.	Une autre construction des formes caractéristiques	114
5.3.4.	La transgression	115
5.4	Opérateurs de différence itérée	117
5.5	Quelques exemples de classes caractéristiques	117
5.5.1.	Remarque sur la restriction du groupe structural	117
5.5.2.	Coefficients du polynôme caractéristique ($G = GL(r, \mathbb{K})$) . . .	118
5.5.3.	Les classes de Chern ($G = U(r)$ ou $GL(r, \mathbb{C})$)	119
5.5.4.	Les classes de Pontrjagin ($G = O(r)$ ou $GL(r, \mathbb{R})$)	122
5.5.5.	La classe d'Euler définie par le pfaffien ($G = SO(2r)$)	124
5.6	Théorie de Chern-Weil en K -théorie	129
5.6.1.	Esquisse de K -théorie	130
5.6.2.	Classes caractéristiques en K -théorie	133
5.6.3.	Connexions et formes caractéristiques en K -théorie	134
5.6.4.	Extension de l'opérateur différence itérée à la K -théorie	135
5.7	Quelques théorèmes d'annulation ou d'obstruction	136
5.7.1.	Obstructions à la réduction du groupe structural	136
5.7.2.	Obstructions à l'existence d'un champ de vecteurs holomorphe sans singularité	137
5.7.3.	Théorèmes d'annulation de Bott	140
5.7.4.	Obstructions à l'existence d'un champ de Killing sans singu- larité sur une variété riemannienne	143
5.7.5.	Obstructions à l'exactitude d'une suite de fibrés vectoriels . . .	147
6	Quelques théorèmes de résidus	151
6.1	Introduction	151
6.2	Procédé général de fabrication et calcul des résidus en Géométrie différentielle	152
6.2.1.	Théorie de Chern-Weil sur $MV^*(\mathcal{U})$	152
6.2.2.	Un premier exemple : les résidus de Cauchy	156
6.3	Restriction du groupe structural	156
6.3.1.	Indices de Poincaré-Hopf pour les fibrés vectoriels réels	157
6.3.2.	Indices de Poincaré-Hopf pour les fibrés vectoriels complexes . . .	159
6.4	Champs de vecteurs holomorphes et résidus de Bott	163
6.4.1.	Cas d'un point singulier isolé : résidus de Grothendieck	164
6.4.2.	Cas où Σ_α est une sous-variété holomorphe lisse de V	168
6.5	Champs de Killing et résidus de Baum-Cheeger	170
6.6	Résidus en K -théorie	174
6.6.1.	Résidus de Baum-Bott	175
6.6.2.	Indices des applications holomorphes	176
6.6.3.	Suites de fibrés exactes presque partout	178
6.6.4.	Genre géométrique des courbes singulières	180
6.6.5.	Indices GSV	184
6.6.6.	Résidus des feuilletages holomorphes relativement à une sous-variété non nécessairement invariante	186
6.6.7.	Singularités dicritiques des champs de vecteurs	188

7	Appendice	193
7.1	Rudiments d'algèbre homologique	193
7.1.1.	Suites exactes	193
7.1.2.	Cohomologie d'un complexe de chaînes ou de cochaînes	194
7.2	Rappels sur les groupes et algèbres de Lie	195
7.2.1.	Groupes de Lie	195
7.2.2.	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	197
7.2.3.	L'application exponentielle	198
7.2.4.	La représentation adjointe	199
7.2.5.	Tores maximaux	199
7.3	Rappels sur le complexe de de Rham	200
7.4	Complexe de Mayer-Vietoris et dualité	208
7.4.1.	Cohomologie locale et excision	209
7.4.2.	Intégration sur $MV^N(\mathcal{U})$ et dualité	210
7.5	Complexe de Čech-de Rham	213
7.5.1.	Rappels sur le complexe de Čech-de Rham	213
7.5.2.	Intégration sur le complexe de Čech-de Rham	215
7.5.3.	Dualité dans le complexe de Čech-de Rham	217
7.5.4.	Résidus de Grothendieck	218
	Bibliographie	221
	Index	226