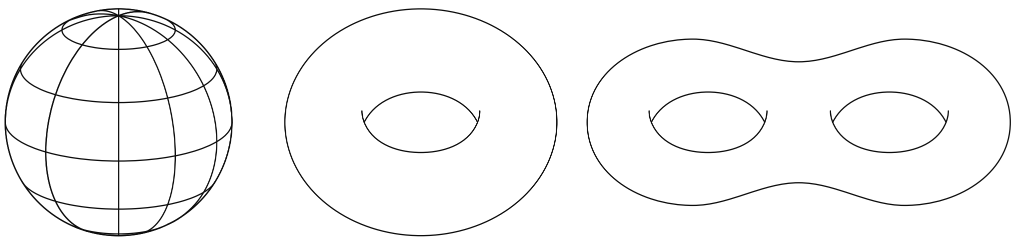
Chapitre 1
Un exemple prototype

L'invariant d'Euler-Poincaré $\chi(V)$ d'une surface compacte V est un entier, égal à $2-2h$ si V est sans bord, orientable, connexe, et de genre h.



$h=0$ *(sphère)* $h=1$ *(tore)* $h=2$

Cet entier peut se calculer comme intégrale de la courbure d'une connexion préservant une métrique riemannienne sur la surface ou sur son revêtement orientable à deux feuillets (théorème de Gauss-Bonnet). C'est en fait un invariant topologique, qui caractérise entièrement la topologie de la surface une fois précisé si elle est ou non orientable, et qui ne dépend donc ni de la métrique riemannienne sur la surface, ni de la connexion qui préserve cette métrique. Lorsqu'il n'est pas nul, il y a obstruction à l'existence d'un champ de vecteurs sans singularité sur cette surface.

La donnée d'un champ de vecteurs v avec singularités sur V permet de localiser $\chi(V)$ au voisinage des singularités sous forme d'un "théorème de résidus" : c'est le théorème de Poincaré-Hopf, qui permet de calculer $\chi(V)$ en fonction du comportement local de v au voisinage de ses seules singularités.

Si l'on se donne une décomposition cellulaire (K) de V dont le nombre de faces est égal à F, le nombre d'arêtes à A, et le nombre de sommets à S, l'entier $F+S-A$, qui est aussi égal à $\chi(V)$, ne dépend donc pas de (K) (théorème d'Euler).

A regret, et parce que ce chapitre a surtout été conçu comme introduction aux suivants, nous n'y avons pas fait autant de figures ni proposé autant d'exercices que le thème aurait mérité, et renvoyons à l'abondante littérature sur le sujet[1].

1.1 Connexions sur l'espace tangent à une surface

Soit V une surface (*i.e.* une variété réelle de dimension 2), que l'on supposera de classe C^∞, compacte, orientable, sans bord et connexe. Notons $C^\infty(V)$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur V à valeurs réelles, et $\mathcal{V}ec(V)$ le $C^\infty(V)$-module des champs de vecteurs sur V.

1. Voir par exemple [2] [3], [19], [13]....

On appelle *métrique riemannienne* sur V la donnée d'une forme $C^\infty(V)$-bilinéaire, symétrique, et définie positive

$$g : \mathcal{V}ec(V) \times \mathcal{V}ec(V) \to C^\infty(V) \ :$$

pour tout $X \in \mathcal{V}ec(V)$, $g(X,X)$ est une fonction à valeurs ≥ 0, prenant des valeurs > 0 en tout point de V où X est non nul. Par exemple, si V est plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{E}_3$, on définit une métrique g en posant : $g_m(X,Y) =< X_m, Y_m >$ (produit scalaire dans l'espace euclidien). Nous démontrerons plus généralement qu'il existe toujours de telles métriques riemanniennes (proposition 2.3.1 du chapitre 2).

On appelle *connexion*[2] sur V la donnée d'une application

$$(X,Y) \to \nabla_X Y$$

de $\mathcal{V}ec(V) \times \mathcal{V}ec(V)$ dans $\mathcal{V}ec(V)$, $C^\infty(V)$-linéaire en X, $\mathbb{R}$-linéaire en Y, et vérifiant la *formule de Leibnitz*[3] :

(*) $\nabla_X(uY) = u\nabla_X Y + (X.u)Y$ pour tous X, Y dans $\mathcal{V}ec(V)$ et u dans $C^\infty(V)$.

On notera ∇Y l'application $C^\infty(V)$-linéaire $X \mapsto \nabla_X Y$.

On dira qu'une telle connexion préserve une métrique riemannienne g si

(**) $X.g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ pour tous X, Y, Z dans $\mathcal{V}ec(V)$.

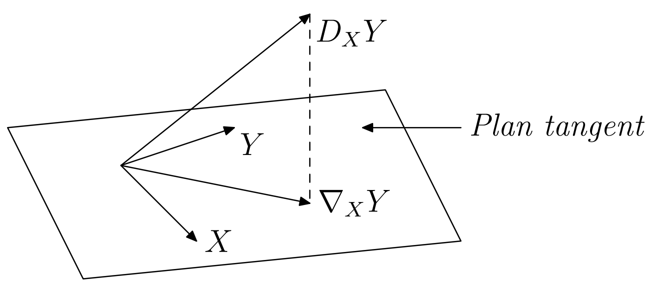
Exercice 1.1.1 (connexion de Levi-Civita)**.** *En répétant la relation* $(**)$ *par permutation circulaire, ainsi que la relation de torsion nulle ci-dessous, montrer qu'il existe une et une seule connexion* ∇ *préservant une métrique riemannienne* g*, vérifiant en plus la condition* (*dite de* torsion nulle) *:* $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$ *pour tous* X, Y*.* [*On appelle cette connexion la* connexion de Levi-Civita *relative à* g].

Par exemple, si V est plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{E}_3$, prenons pour $g(X,Y)$ le produit scalaire euclidien $< X, Y >$ comme ci-dessus. Un champ de vecteurs Y sur V est défini par ses trois fonctions coordonnées u, v, w relativement à une base orthonormée $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de $\mathbb{E}_3$: $Y = u\ \vec{i} + v\ \vec{j} + w\ \vec{k}$. Notons

$$D_X Y = (X.u)\ \vec{i} + (X.v)\ \vec{j} + (X.w)\ \vec{k}$$

le champs de vecteurs sur V dans $\mathbb{E}_3$, dont les composantes sont les dérivées des composantes de Y par rapport à X : ce champ $D_X Y$ n'est plus nécéssairement tangent à V, mais son image par la projection orthogonale p^T en chaque point sur l'espace tangent à V l'est.

$$\nabla_X Y = p^T(D_X Y)$$



Connexion de Levi-Civita sur une surface plongée dans $\mathbb{E}^3$

2. Les motivations d'une telle définition seront données au chapitre trois, dans un contexte plus général. Pour l'instant, nous voulons en arriver le plus vite possible à la formule de Gauss-Bonnet.

3. Dans tout ce livre, la notation $X.u$ (resp. $X_m.u$) désignera la dérivée d'une fonction différentiable u dans la direction d'un champ de vecteurs X (resp. d'un vecteur tangent X_m).

Exercice 1.1.2. *Montrer que l'on définit ainsi une connexion, et que celle-ci est la connexion de Levi-Civita relative à la métrique* $< \, , \, >$ *induite par la métrique euclidienne.*

Exercice 1.1.3 (caractère local d'une connexion). *Montrer qu'une connexion sur une surface induit une connexion sur tout ouvert de cette surface. Montrer qu'une connexion sur* V *est entièrement définie par l'ensemble de ses restrictions à des ouverts qui recouvrent* V.

1.2 Courbure d'une connexion

Soit ∇ une connexion sur V. On pose, pour tous champs de vecteurs X, Y, Z :

(***) $$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Définition 1.2.1. *On appelle* R la courbure *de la connexion.*

Exercice 1.2.1. *Montrer que* R *est* $C^\infty(V)$*-trilinéaire en* X, Y, Z.

Exercice 1.2.2. *Montrer que si* ∇ *préserve une métrique riemannienne* g *sur* V, *sa courbure vérifie, pour tous* X, Y, Z_1, Z_2, *la formule :*

$$g\big(R(X,Y)Z_1, Z_2\big) + g\big(Z_1, R(X,Y)Z_2\big) = 0$$

On dit que la courbure est anti-symétrique[4] *en* (Z_1, Z_2), *relativement à* g.

1.3 Invariant d'Euler-Poincaré d'une surface compacte

Supposons pour l'instant V orientée, et munie d'une métrique riemannienne g. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement de V par des ouverts U_i au dessus de chacun desquels il existe un champ de repères orthonormés directs (A_i, B_i).

Compte tenu de $(**)$, ∇A_i doit être orthogonal à A_i, donc colinéaire à B_i, ∇B_i doit être de même colinéaire à A_i, et $g(\nabla A_i, B_i) = -g(\nabla B_i, A_i)$, dès que la connexion ∇ sur V préserve la métrique g : il existe donc une 1-forme ω_i sur chaque ouvert U_i telle que, relativement au repère local (A_i, B_i), ∇ et sa courbure R s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla B_i = \omega_i \; A_i \; , \\ \nabla A_i = -\omega_i \; B_i \; . \end{cases} \quad \text{On en déduit :} \begin{cases} R(X,Y)B_i = d\omega_i(X,Y) \; A_i \; , \\ R(X,Y)A_i = -d\omega_i(X,Y) \; B_i \; . \end{cases}$$

On écrit encore en abrégé :

$$\nabla|_{U_i} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R|_{U_i} = \begin{pmatrix} 0 & d\omega_i \\ -d\omega_i & 0 \end{pmatrix}$$

relativement au repère local (A_i, B_i).

Sur l'intersection $U_i \cap U_j$ de deux des ouverts du recouvrement, il existe une fonction différentiable $\theta_{ij} : U_i \cap U_j \to S^1$ à valeurs dans le cercle $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telle que

$$\begin{cases} A_j = \cos\theta_{ij} \; A_i + \sin\theta_{ij} \; B_i, \\ B_j = -\sin\theta_{ij} \; A_i + \cos\theta_{ij} \; B_i. \end{cases}$$

4. Nous verrons au chapitre trois que cette propriété est en relation avec le fait que l'algèbre de Lie du groupe orthogonal $O(2)$ est égale à l'ensemble des matrices 2×2 anti-symétriques.

D'après $(*)$, $\nabla B_j = (\omega_i - d\theta_{ij})\ A_j$. On en déduit : $\omega_j = \omega_i - d\theta_{ij}$ sur $U_i \cap U_j$. Les différentielles $d\omega_i$ et $d\omega_j$ se "recollent", puisqu'elles coïncident sur $U_i \cap U_j$: la matrice représentant R relativement à un champ de repères orthonormés directs ne dépend donc pas de celui-ci, et il existe une 2-forme Ω, globalement définie sur tout V, fermée car localement exacte[5], dont la restriction à chaque ouvert U_i est égale à $d\omega_i$. On écrit en abrégé :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix}.$$

On appelle[6] *pfaffien* l'application $Pf : so(2) \to \mathbb{R}$ qui, à toute matrice 2×2 antisymétrique $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ associe le nombre $\dfrac{1}{2\pi}\, a$, et l'on pose $Pf(R) = \dfrac{1}{2\pi}\, \Omega$.

Remarque 1.3.1. La formule

$$\begin{pmatrix} \cos\,\theta & -\sin\,\theta \\ \sin\,\theta & \cos\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\,\theta & \sin\,\theta \\ -\sin\,\theta & \cos\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

exprime que la représentation adjointe de $SO(2)$ sur son algèbre de Lie $so(2)$ est triviale (ce qui est évident puisque le groupe $SO(2)$ est abélien), et que le pfaffien est donc invariant par cette représentation. Par contre, il n'est pas invariant par la représentation adjointe de $O(2)$ sur $so(2)$: par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & +a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ +a & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.3.1 (Gauss-Bonnet)**.**

(i) La 2-forme $Pf(R)$ est fermée.

(ii) Sa classe de cohomologie $[Pf(R)]$ dans la cohomologie de de Rham $H^2(V;\mathbb{R})$ ne dépend ni de la métrique riemannienne g, ni de la connexion ∇ préservant g. Elle ne dépend que de l'orientation de V. Si l'on change l'orientation de V, la classe de cohomologie $[Pf(R)]$ change de signe.

(iii) Si la surface V est compacte et orientable, l'intégrale

$$\chi(V) = \int_V Pf(R)$$

est un entier pair[7]. Cet entier ne dépend pas de l'orientation de V.

(iv) S'il existe un champ de vecteurs v sur V sans singularité, la classe $[Pf(R)]$ est nulle.

---

5. Voir au début de la section 4 ci-dessous la signification précise d'une 1-forme telle que $d\theta_{ij}$.

6. Plus généralement, on définira au chapitre cinq le pfaffien d'ordre r, comme étant un certain polynôme $Pf : so(2r) \to \mathbb{R}$ sur l'algèbre de Lie $so(2r)$ des matrices anti-symétriques de taille $2r$, homogène de degré r, invariant par la représentation adjointe de $SO(2r)$ sur $so(2r)$. Son carré est égal à $\frac{1}{(4\pi^2)^r}$ fois le déterminant.

7. C'est précisément pour obtenir un entier par intégration que l'on a normalisé Ω en divisant par 2π dans la définition du pfaffien.

Démonstration.

Puisque Ω est localement de la forme $d\omega_i$, il est clair que $Pf(R)$ est fermée.

Soit ∇' une autre connexion sur V, préservant la même métrique riemannienne g que ∇. On note $h : \mathcal{V}ec(V) \times \mathcal{V}ec(V) \to \mathcal{V}ec(V)$ l'application

$$h(X,Y) = \nabla'_X Y - \nabla_X Y.$$

Cette application est $C^\infty(V)$-bilinéaire, et chaque endomorphisme $h(X,.)$ est anti-symétrique relativement à g :

$$g\big(h(X,Y),Z\big) + g\big(Y,h(X,Z)\big) = 0 \text{ pour tous } X,Y,Z.$$

Soit (A,B) un champ local de repères orthonormés direct : il existe -au moins localement- une 1-forme $X \mapsto \lambda(X)$ telle que

$$h(X,B) = \lambda(X)\ A,\ h(X)\ A = -\lambda(X)\ B.$$

Puisque

$$h(X, -\sin\theta\ A + \cos\theta\ B) = \lambda(X)(\cos\theta\ A + \sin\theta\ B),$$

on aura encore $h(X,\underline{B}) = \lambda(X)\ \underline{A}$ pout tout autre champ de repères orthonormés directs $(\underline{A},\underline{B})$, de sorte que les 1-formes locales λ ne dépendent pas de (A,B) et se recollent en une 1-forme λ définie globalement sur tout V.

Si l'on pose $\nabla' B_i = \omega'_i\ A_i$, la différence $\omega'_i - \omega_i$ est égale à la restriction de λ à U_i. Comme la forme λ est définie globalement, on en déduit, notant R' la courbure de ∇' :

$$Pf(R') - Pf(R) = \frac{1}{2\pi}\ d\lambda\ .$$

Les classes de cohomologie $[Pf(R)]$ et $[Pf(R')]$ sont donc les mêmes.

Si l'on change l'orientation de V, la classe de cohomologie $[Pf(R)]$ change de signe, mais la classe fondamentale $[V]$ sur laquelle on l'intègre change également de signe : l'intégrale $\int_V Pf(R) = [Pf(R)] \frown [V]$ ne change donc pas.

L'intégralité de $\chi(V)$ sera un corollaire du théorème de Poincaré-Hopf à la section 4, de même que l'assertion (iv) ; et sa parité pour une surface compacte orientable sera démontrée à l'exercice 1.4.3 de ce chapitre.

Enfin, le fait que l'invariant d'Euler-Poincaré (donc la classe d'Euler) ne dépende pas de la métrique riemannienne g, est une conséquence de l'intégralité. En effet, si g et g' sont deux telles métriques riemanniennes, $g_t = tg' + (1-t)g$ en est encore une pour tout $t \in [0,1]$. Notant alors $\chi_t(V)$ l'invariant construit par le procédé précédent à l'aide de g_t et de la connexion de Levi-Civita associée, l'application $t \mapsto \chi_t(V)$ est continue, définie sur $[0,1]$ qui est connexe, et donc constante si elle ne peut prendre que des valeurs entières.

□

Définition 1.3.1. *La classe de cohomologie* $[Pf(R)]$ *dans* $H^2(V;\mathbb{R})$ *s'appelle* la classe d'Euler *de la surface* V *compacte, orientée , et sans bord. On la notera* $Eul(V)$. *Son évaluation*

$$\chi(V) = Eul(V) \frown [V]$$

sur la classe fondamentale de V *s'appelle* l'invariant d'Euler-Poincaré *de la surface.*

Une surface compacte connexe non orientable V admet un revêtement compact orientable V' à deux feuillets : cela signifie qu'il existe[8] une application différentiable $\pi : V' \to V$, surjective de rang deux en chaque point, où V' désigne une surface compacte connexe orientable, telle que l'image réciproque par π d'un point de V soit formée de deux points de V'. En outre, $\pi : V' \to V$ est bien défini à isomorphisme près au sens suivant : si $\pi_1 : V_1' \to V$ possède les mêmes propriétés, il existe un difféomorphisme $F : V' \overset{\cong}{\to} V_1'$ tel que $\pi_1' \circ F = \pi$.

On définit alors $\chi(V)$ comme étant égal à $\frac{1}{2}\,\chi(V')$: c'est encore un entier, qui n'est plus nécéssairement pair.

Par exemple, l'application naturelle $S^2 \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, qui consiste à identifier deux points antipodaux sur la sphère, est le revêtement orientable du plan projectif réel $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, et nous verrons un peu plus loin que $\chi(S^2) = 2$ et $\chi(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) = 1$.

1.4 Théorème de Poincaré-Hopf

Avant de montrer que $\chi(V)$ est un entier, afin d'achever la démonstration du théorème de Gauss-Bonnet, rappelons tout d'abord qu'une fonction différentiable à valeurs angulaires $\theta : U \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ peut toujours se relever localement (i.e. sur n'importe quel ouvert simplement connexe inclus dans U) en une fonction $\widehat{\theta}$ à valeurs réelles (la "mesure" de l'angle), bien définie à constante additive près multiple de 2π. Il en résulte que la différentielle $d\widehat{\theta}$ d'un tel relèvement ne dépend que de θ, et que les différentielles $d\widehat{\theta}$, définies localement, se recollent pour définir globalement (i.e. sur tout U) une 1-forme fermée sur U, que l'on note $d\theta$ (qui n'est pas nécéssairement exacte en dépit de la notation[9]).

Soit $\theta : S^1 \to S^1$ une application continue : une fois le cercle S^1 orienté et identifié à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\theta(t)$ varie d'un multiple entier de 2π lorsque t augmente de 0 à 2π : c'est cet entier, d, qu'on appelle le *degré* de l'application et qui est égal, lorsque θ est différentiable, à l'intégrale

$$d = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} d\theta.$$

Si l'on change l'orientation du cercle (source et but simultanément), le degré de l'application ne change pas.

Supposant pour l'instant la surface V orientable, nous allons introduire maintenant certaines connexions particulières liées aux champs de vecteurs. Soit v un champ de vecteurs différentiable sur V, avec éventuellement des singularités[10] isolées m_α (en nombre nécéssairement fini puisque V est supposée compacte). On notera $\Sigma = \{m_\alpha\}_\alpha$ l'ensemble de ces points singuliers.

Remarque 1.4.1. Il existe toujours de tels champs de vecteurs à singularités isolées. On sait en fait en exhiber sur chaque exemple de surface compacte (par exemple, le gradient de la restriction $x|_{S_h}$ de la fonction coordonnée x à la surface, dans le cas des surfaces S_h de l'exercice 1.4.3 de ce chapitre).

8. Voir l'exercice 2.10.2 du chapitre deux.
9. Rappelons que θ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et non dans $\mathbb{R}$.
10. On entend par point singulier de v un point en lesquel v s'annule, ou n'est pas défini.

Pour l'instant, munissons préalablement la surface d'une métrique riemannienne g et d'une orientation. Soit D_α un disque compact entourant m_α (*i.e.* un voisinage compact homéomorphe à un disque, dont on supposera le bord ∂D_α différentiable par morceaux). On supposera les disques D_α suffisamment petits pour que

$$D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset \text{ si } \alpha \neq \beta.$$

Soit (A_α, B_α) un champ de repères orthonormés directs sur un voisinage U_α de D_α. Sur $V \setminus \Sigma$, définissons $A = \frac{1}{\|v\|}v$, et notons B le champ de vecteurs déduit de A par rotation de $+\frac{\pi}{2}$. Soit D'_α un voisinage compact de m_α inclus dans l'intérieur de D_α. Définissons une connexion ∇ préservant la métrique g, et vérifiant $\nabla B = 0$, $\nabla A = 0$ sur le complémentaire U de la réunion des disques D'_α.

Exercice 1.4.1. *A l'aide d'une partition différentiable de l'unité, montrer qu'il existe toujours de telles connexions.*

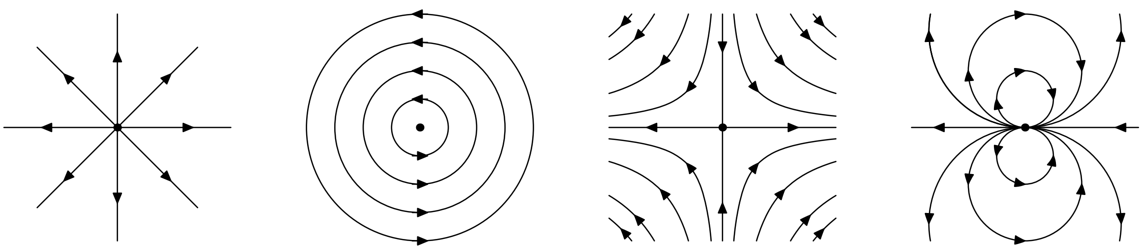
Puisque la courbure R d'une telle connexion est nulle sur U, l'intégrale $\int_V Pf(R)$ est égale à la somme $\sum_\alpha \int_{D_\alpha} Pf(R)$. Notant ω_α la forme de la connexion au dessus de U_α relativement à (A_α, B_α), la formule de Stokes implique

$$\int_{D_\alpha} Pf(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_\alpha} \omega_\alpha.$$

Soit $\theta_\alpha : \partial D_\alpha \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'angle de rotation tel que

$$A = \cos\theta_\alpha \; A_\alpha + \sin\theta_\alpha \; B_\alpha \quad , \quad B = -\sin\theta_\alpha \; A_\alpha + \cos\theta_\alpha \; B_\alpha \text{ sur } \partial D_\alpha \; .$$

La condition $\nabla B = 0$ s'écrit : $\omega_\alpha = d\theta_\alpha$ sur ∂D_α. Par conséquent, l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_\alpha} d\theta_\alpha$ est le degré d'une application du cercle dans lui-même : c'est un **entier**, qu'on appelle *l'indice de Poincaré-Hopf* en m_α du champ de vecteurs v, et que l'on notera $I(v, m_\alpha)$.



$I(v, m_\alpha) = 1$ $\qquad$ $I(v, m_\alpha) = 1$ $\qquad$ $I(v, m_\alpha) = -1$ $\qquad$ $I(v, m_\alpha) = 2$

Lemme 1.4.1.

(i) L'indice $I(v, m_\alpha)$ ne dépend que du comportement de v sur un voisinage arbitrairement petit de m_α.

(ii) L'indice $I(v, m_\alpha)$ ne dépend ni du choix de (U_α, D_α), ni du choix de (A_α, B_α), ni du choix de la métrique riemannienne g.

Il ne dépend pas non plus du choix de l'orientation de U_α induite par celle de V, de sorte qu'il a une signification même si la variété V n'est pas orientable.

Démonstration.

Quand on change l'orientation de U_α, $d\theta_\alpha$ est changée en son opposé, et ∂D_α change d'orientation, de sorte que finalement, l'intégrale $\int_{\partial D_\alpha} d\theta_\alpha$ (donc l'indice) ne change pas.

Si U^1_α, D^1_α est un autre système de voisinages de m_α, on peut toujours choisir U^2_α, D^2_α de façon que U^2_α et D^2_α soient respectivement inclus dans $U_\alpha \cap U^1_\alpha$ et $D_\alpha \cap D^1_\alpha$. On peut aussi choisir D'_α inclus dans dans l'intérieur de D^2_α. La forme $\omega_\alpha = d\theta_\alpha$ est donc fermée sur tout $D_\alpha \setminus D^2_\alpha$, d'où l'égalité $\int_{\partial D_\alpha} d\theta_\alpha = \int_{\partial D^2_\alpha} d\theta_\alpha$, et de même $\int_{\partial D^1_\alpha} d\theta_\alpha = \int_{\partial D^2_\alpha} d\theta_\alpha$.

Si (A'_α, B'_α) est un autre champ de repères orthonormés directs sur U_α, on remplace ω_α par $\omega_\alpha - da_\alpha$, où l'angle de rotation a_α permettant de passer de (A_α, B_α) à (A'_α, B'_α) est défini sur *tout* U_α. La forme da_α est donc exacte sur D_α de sorte que $\int_{\partial D_\alpha} d\theta_\alpha - da_\alpha = \int_{\partial D_\alpha} d\theta_\alpha$, d'après la formule de Stokes.

Si g' est une autre métrique riemannienne, $g_t = tg' + (1-t)g$ en est encore une quel que soit $t \in [0,1]$. L'indice $I_t(v, m_\alpha)$ défini à l'aide de la métrique g_t est une fonction continue de t, à valeurs entières : elle est donc constante.

Si V n'est pas orientable, tout champ de vecteurs v sur V est la projection d'un champ de vecteurs v' sur son revêtement orientable V' à deux feuillets, et toute singularité isolée m_α de v sur V est la projection de deux points singuliers m^1_α et m^2_α de v', tels que $I(v, m_\alpha) = I(v', m^1_\alpha) = I(v, m^2_\alpha)$. □

On a ainsi démontré le

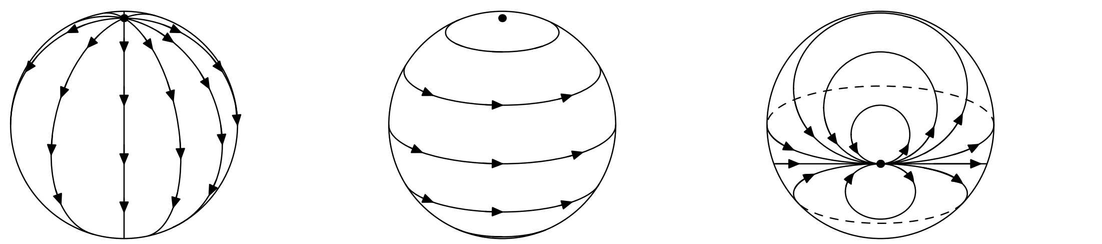
Théorème 1.4.1 (Poincaré-Hopf). *Soit v un champ de vecteurs à singularités isolées sur une surface compacte sans bord V (orientable ou non). L'égalité suivante est vérifiée :*

$$\chi(V) = \sum_\alpha I(v, m_\alpha).$$

En particulier $\sum_\alpha I(v, m_\alpha)$ ne dépend pas du champ de vecteurs v.

Pour qu'une surface compacte sans bord admette un champ de vecteurs sans singularité, il faut[11] *que son invariant d'Euler-Poincaré soit nul.*

Le fait que l'invariant d'Euler-Poincaré soit toujours un entier est une conséquence immédiate du théorème de Poincaré-Hopf.



Deux singularités d'indice 1 *Une seule singularité d'indice 2*

Exemples de champs de vecteurs sur la sphère

11. En fait cela suffit : admettant que le tore et la bouteille de Klein sont les seules surfaces connexes compactes sans bord dont l'invariant d'Euler-Poincaré est nul, on sait en effet construire un champ de vecteurs sans singularité sur chacune de ces deux surfaces.