

# Table des matières

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>ELEMENTS DE CALCUL DIFFERENTIEL</b>                                 | <b>1</b> |
| 1.1      | QUELQUES NOTATIONS . . . . .   | 2        |
| 1.2      | DERIVEE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE . . . . .                        | 2        |
| 1.2.1    | Fonction continue . . . . .  | 3        |
| 1.2.2    | Définition et motivation de la dérivée . . . . .                       | 3        |
| 1.2.3    | Propriétés des dérivées . . . . .                                      | 11       |
| 1.2.4    | Dérivée d'ordre $n$ . . . . .  | 15       |
| 1.2.5    | Conditions de Lagrange . . . . .                                       | 15       |
| 1.2.6    | Fonction exponentielle et fonction logarithme de<br>base $a$ . . . . . | 22       |
| 1.2.7    | Systèmes de coordonnées semi-logarithmiques . . . . .                  | 24       |
| 1.3      | COURBES DE CROISSANCE EN MICROBIOLOGIE . . . . .                       | 25       |
| 1.3.1    | Loi exponentielle de Malthus . . . . .                                 | 29       |
| 1.3.2    | Modèle sigmoïde de croissance . . . . .                                | 31       |
| 1.4      | MODELE DE VERHULST EN ZOOLOGIE . . . . .                               | 34       |
| 1.5      | DERIVEES PARTIELLES . . . . .  | 35       |
| 1.5.1    | Fonction continue . . . . .  | 37       |
| 1.5.2    | Dérivées partielles . . . . .  | 37       |
| 1.5.3    | Propriétés des dérivées partielles . . . . .                           | 41       |
| 1.5.4    | Dérivées partielles d'ordre 2 . . . . .                                | 43       |
| 1.6      | LOIS DE VITESSE DIFFERENTIELLE EN CHIMIE . . . . .                     | 43       |
| 1.6.1    | Réaction élémentaire . . . . .   | 46       |
| 1.6.2    | Réaction complexe . . . . .  | 48       |
| 1.7      | LOIS DE VITESSE DIFFERENTIELLE EN BIOCHIMIE . . . . .                  | 53       |
| 1.7.1    | Cinétique enzymatique . . . . .  | 53       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 1.7.2    | Inhibition compétitive . . . . .                        | 56         |
| 1.7.3    | Inhibition non compétitive . . . . .                    | 59         |
| 1.8      | MODELE SECONDAIRE DU TAUX DE CROISSANCE . . . . .       | 62         |
| 1.9      | EXERCICES . . . . .                                     | 63         |
| <b>2</b> | <b>EQUATIONS DE RECURRENCE</b>                          | <b>73</b>  |
| 2.1      | SUITE DE NOMBRES REELS . . . . .                        | 74         |
| 2.1.1    | Définition et motivation . . . . .                      | 74         |
| 2.1.2    | Suites majorées et minorées . . . . .                   | 77         |
| 2.1.3    | Convergence d'une suite . . . . .                       | 78         |
| 2.1.4    | Suites croissantes et décroissantes . . . . .           | 81         |
| 2.2      | EQUATION DE RECURRENCE . . . . .                        | 84         |
| 2.2.1    | Solution d'une équation de récurrence . . . . .         | 84         |
| 2.2.2    | Solution d'équilibre . . . . .                          | 87         |
| 2.2.3    | Attractivité et répulsivité d'un équilibre . . . . .    | 89         |
| 2.2.4    | Equation de récurrence linéaire d'ordre 1 . . . . .     | 93         |
| 2.3      | MODELE DE RICKER EN BIOLOGIE . . . . .                  | 96         |
| 2.4      | APPLICATIONS EN GENETIQUE . . . . .                     | 101        |
| 2.4.1    | Les rapports de Mendel . . . . .                        | 102        |
| 2.4.2    | Transmission autosomique - les lois de Mendel . . . . . | 105        |
| 2.4.3    | La loi de Hardy et Weinberg . . . . .                   | 108        |
| 2.4.4    | Mutation ponctuelle . . . . .                           | 112        |
| 2.4.5    | Mutation ponctuelle et réversion . . . . .              | 114        |
| 2.4.6    | Homozygotes récessifs létaux . . . . .                  | 118        |
| 2.4.7    | Sélection orientée . . . . .                            | 122        |
| 2.4.8    | Equilibre sélection - mutation . . . . .                | 126        |
| 2.5      | EXERCICES . . . . .                                     | 128        |
| <b>3</b> | <b>EQUATIONS ALGEBRIQUES</b>                            | <b>141</b> |
| 3.1      | METHODES DE RESOLUTION . . . . .                        | 141        |
| 3.1.1    | Méthode analytique . . . . .                            | 142        |
| 3.1.2    | Méthode numérique de Newton-Raphson . . . . .           | 145        |
| 3.2      | EQUATION D'EQUILIBRE EN CHIMIE . . . . .                | 151        |
| 3.2.1    | Calcul des concentrations à l'équilibre . . . . .       | 159        |
| 3.2.2    | Calcul de pH . . . . .                                  | 163        |
| 3.2.3    | Calcul de $pK_a$ et $pK_b$ . . . . .                    | 165        |
| 3.2.4    | Indicateur en chimie . . . . .                          | 167        |

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.2.5    | Solution tampon en chimie . . . . .   | 167        |
| 3.3      | EXERCICES . . . . .   | 169        |
| <b>4</b> | <b>EQUATIONS DIFFERENTIELLES</b>  | <b>179</b> |
| 4.1      | MODELE DE DATATION AU CARBONE 14 . . . . .                                  | 179        |
| 4.2      | EQUATION DIFFERENTIELLE ET PROBLEME DE<br>CAUCHY . . . . .                  | 183        |
| 4.2.1    | Primitive et intégrale . . . . .  | 183        |
| 4.2.2    | Equation différentielle et problème de Cauchy . .                           | 187        |
| 4.3      | EQUATION LINEAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS .                                | 191        |
| 4.3.1    | Résolution du problème homogène . . . . .                                   | 191        |
| 4.3.2    | Solution d'équilibre . . . . .  | 192        |
| 4.3.3    | Propriété de superposition . . . . .  | 192        |
| 4.3.4    | Problème de Cauchy . . . . .  | 193        |
| 4.4      | CINETIQUE DE REFROIDISSEMENT D'UN ALIMENT . .                               | 194        |
| 4.5      | REACTION IRREVERSIBLE D'ORDRE 1 EN CHIMIE . .                               | 195        |
| 4.6      | CINETIQUE DE DESTRUCTION THERMIQUE . . . . .                                | 197        |
| 4.7      | MODELE DE LA REINE ROUGE . . . . .  | 198        |
| 4.8      | EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU PREMIER<br>ORDRE . . . . .              | 205        |
| 4.8.1    | Résolution du problème homogène . . . . .                                   | 205        |
| 4.8.2    | Recherche d'une solution particulière . . . . .                             | 206        |
| 4.8.3    | Propriété de superposition . . . . .  | 207        |
| 4.8.4    | Problème de Cauchy . . . . .  | 207        |
| 4.9      | CINETIQUE DE DESTRUCTION BACTERIENNE . . . . .                              | 209        |
| 4.10     | MODELE DE REACTEUR . . . . .  | 212        |
| 4.10.1   | Alimentation et soutirage à débit constant . . . .                          | 214        |
| 4.10.2   | Alimentation et soutirage à débit constant avec<br>recyclage de A . . . . . | 216        |
| 4.10.3   | Alimentation et soutirage pulsé . . . . .                                   | 219        |
| 4.11     | UN MODELE DE TRANSIT DE L'UREE DANS LE SANG .                               | 220        |
| 4.12     | UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DE BERNOULLI . .                                | 223        |
| 4.13     | REACTION IRREVERSIBLE D'ORDRE $n > 1$ EN CHIMIE                             | 224        |
| 4.14     | UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DE RICCATI . . . .                              | 226        |
| 4.14.1   | Cas où A et B sont des fonctions constantes . . .                           | 227        |
| 4.14.2   | Cas général . . . . .   | 227        |
| 4.15     | COURBE DE CROISSANCE EN MICROBIOLOGIE . . . .                               | 228        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.15.1   | Modèle de croissance exponentielle . . . . .                  | 228        |
| 4.15.2   | Modèle de croissance exponentielle avec latence . . . . .     | 229        |
| 4.15.3   | Modèle de croissance logistique de Verhulst . . . . .         | 229        |
| 4.15.4   | Modèle de croissance logistique généralisé . . . . .          | 230        |
| 4.16     | EQUATION CINETIQUE D'UNE REACTION CHIMIQUE . . . . .          | 233        |
| 4.16.1   | Réaction d'interconversion $X \rightleftharpoons Y$ . . . . . | 237        |
| 4.16.2   | Réaction élémentaire $X + Y \rightarrow Z + W$ . . . . .      | 241        |
| 4.16.3   | Réaction élémentaire $X \rightleftharpoons Y + Z$ . . . . .   | 244        |
| 4.17     | RESOLUTION NUMERIQUE . . . . .                                | 248        |
| 4.17.1   | La méthode d'Euler-Cauchy . . . . .                           | 249        |
| 4.17.2   | Modèle numérique d'Euler-Cauchy en temps discret . . . . .    | 250        |
| 4.17.3   | Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 . . . . .                    | 251        |
| 4.17.4   | Simulation numérique . . . . .                                | 252        |
| 4.18     | MODELE DE MICHAELIS-MENTEN . . . . .                          | 257        |
| 4.19     | MODELE DE CROISSANCE BACTERIENNE DE MONOD . . . . .           | 261        |
| 4.20     | INHIBITION ET RETOUR DE CROISSANCE BACTERIENNE . . . . .      | 264        |
| 4.21     | EXERCICES . . . . .   | 267        |
| <b>5</b> | <b>CALCUL MATRICIEL</b> . . . . .                             | <b>283</b> |
| 5.1      | MATRICES . . . . .  | 283        |
| 5.1.1    | Matrice rectangulaire $m \times n$ . . . . .                  | 283        |
| 5.1.2    | Transposée d'une matrice . . . . .                            | 285        |
| 5.1.3    | Matrice carrée d'ordre $n$ . . . . .                          | 285        |
| 5.1.4    | Vecteurs lignes et vecteurs colonnes . . . . .                | 287        |
| 5.1.5    | Sous-matrices et représentation par blocs . . . . .           | 290        |
| 5.2      | OPERATIONS ELEMENTAIRES SUR LES MATRICES . . . . .            | 290        |
| 5.2.1    | Multiplication par un scalaire . . . . .                      | 290        |
| 5.2.2    | Addition et soustraction de matrices . . . . .                | 291        |
| 5.3      | OUTIL DE GESTION DE DONNEES ECOLOGIQUES . . . . .             | 292        |
| 5.4      | PRODUIT MATRICIEL . . . . .                                   | 295        |
| 5.4.1    | Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne . . . . .   | 295        |
| 5.4.2    | Produit de deux matrices . . . . .                            | 295        |
| 5.4.3    | Puissance d'une matrice . . . . .                             | 297        |
| 5.5      | MATRICES COMPLEXES . . . . .                                  | 297        |
| 5.6      | MODELE MATRICIEL DU CYCLE DE VIE D'UN ANIMAL . . . . .        | 298        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 5.6.1    | Modèle matriciel du cycle de vie d'un rongeur . . .                    | 299        |
| 5.6.2    | Modèle matriciel du cycle de vie d'un insecte . . .                    | 303        |
| 5.7      | MATRICE DE FABRICATION . . . . .                                       | 309        |
| 5.8      | EXERCICES . . . . .  | 311        |
| <b>6</b> | <b>SYSTEME D'EQUATIONS ALGEBRIQUES LINEAIRES</b>                       | <b>323</b> |
| 6.1      | INTRODUCTION . . . . .   | 323        |
| 6.2      | MATRICE INVERSE . . . . .  | 325        |
| 6.2.1    | Déterminant d'une matrice carrée . . . . .                             | 325        |
| 6.2.2    | Calcul de l'inverse d'une matrice carrée . . . . .                     | 331        |
| 6.3      | METHODE DE L'INVERSE . . . . .   | 334        |
| 6.4      | BASE DE VECTEURS . . . . .   | 336        |
| 6.4.1    | Combinaison linéaire de vecteurs . . . . .                             | 336        |
| 6.4.2    | Vecteurs linéairements indépendants et base de<br>vecteurs . . . . .   | 342        |
| 6.4.3    | Propriété des lignes et colonnes d'une Matrice<br>inversible . . . . . | 347        |
| 6.5      | NOYAU ET IMAGE D'UNE MATRICE . . . . .                                 | 348        |
| 6.5.1    | Noyau d'une matrice de taille $m \times n$ . . . . .                   | 348        |
| 6.5.2    | Noyau d'une matrice d'ordre $n$ inversible . . . . .                   | 349        |
| 6.5.3    | Image d'une matrice $m \times n$ . . . . .                             | 349        |
| 6.5.4    | Théorème du rang . . . . .   | 352        |
| 6.5.5    | Image d'une matrice d'ordre $n$ inversible . . . . .                   | 352        |
| 6.5.6    | Structure de l'ensemble $\mathcal{S}(A; b)$ . . . . .                  | 352        |
| 6.6      | METHODE DU PIVOT DE GAUSS . . . . .                                    | 353        |
| 6.7      | SYSTEME COMPLEXE . . . . .   | 361        |
| 6.8      | PROBLEMES DE MELANGE . . . . .   | 362        |
| 6.9      | ANALYSE DE FLUX METABOLIQUES A L'EQUILIBRE .                           | 365        |
| 6.10     | PROCESSUS CHIMIQUES A L'EQUILIBRE . . . . .                            | 370        |
| 6.10.1   | Matrice stoechiométrique . . . . .                                     | 373        |
| 6.10.2   | Matrice de composition . . . . .                                       | 375        |
| 6.10.3   | Réduction d'un système à l'équilibre en chimie .                       | 375        |
| 6.11     | EXERCICES . . . . .  | 383        |
| <b>7</b> | <b>SYSTEME D'EQUATIONS ALGEBRIQUES NON LINEAIRES</b>                   | <b>409</b> |
| 7.1      | LINEARISATION D'UNE FONCTION . . . . .                                 | 410        |
| 7.1.1    | Distance euclidienne et norme . . . . .                                | 410        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 7.1.2    | Vecteur gradient . . . . .  | 412        |
| 7.1.3    | Matrice Jacobienne . . . . .  | 413        |
| 7.2      | METHODE DE NEWTON-RAPHSON . . . . .   | 415        |
| 7.3      | EQUATIONS D'EQUILIBRE EN CHIMIE . . . . .   | 418        |
| 7.4      | EXERCICES . . . . .   | 427        |
| <b>8</b> | <b>MATRICES DIAGONALISABLES</b>   | <b>433</b> |
| 8.1      | VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES . . . . .                                       | 433        |
| 8.1.1    | Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}$ . . . . .                             | 434        |
| 8.1.2    | Calcul des valeurs propres . . . . .  | 437        |
| 8.1.3    | Calcul des vecteurs propres . . . . .   | 439        |
| 8.2      | DIAGONALISATION D'UNE MATRICE . . . . .   | 442        |
| 8.3      | PUISSANCE D'UNE MATRICE . . . . .   | 448        |
| 8.4      | APPLICATIONS EN GENETIQUE . . . . .   | 452        |
| 8.4.1    | Autofécondation chez les plantes diploïdes . . . . .                                | 452        |
| 8.4.2    | Méthode des rétrocroisements répétés<br>en agronomie . . . . .                      | 461        |
| 8.5      | APPLICATIONS EN ZOOLOGIE . . . . .  | 464        |
| 8.5.1    | Matrice de Leslie . . . . .   | 464        |
| 8.5.2    | Matrice de Lefkovitch . . . . .   | 466        |
| 8.5.3    | Distribution d'une population en classes d'âge<br>stable . . . . .                  | 468        |
| 8.5.4    | Distribution d'une population en classes d'âge<br>asymptotiquement stable . . . . . | 471        |
| 8.5.5    | Modélisation du cycle de vie de l'épaulard . . . . .                                | 476        |
| 8.5.6    | Modélisation du cycle de vie du rorqual bleu . . . . .                              | 479        |
| 8.5.7    | Modélisation du cycle de vie de la tortue marine<br>Caret . . . . .                 | 484        |
| 8.6      | EXERCICES . . . . .   | 488        |
| <b>9</b> | <b>SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES</b>   | <b>499</b> |
| 9.1      | INTRODUCTION . . . . .  | 499        |
| 9.2      | SYSTEMES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS   | 506        |
| 9.3      | EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE . . . . .   | 509        |
| 9.3.1    | Définition et propriétés . . . . .  | 509        |
| 9.3.2    | La fonction $t \mapsto e^{At}$ . . . . .  | 512        |
| 9.3.3    | Exponentielle d'une matrice diagonalisable . . . . .                                | 514        |

---

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 9.3.4  | La fonction $t \mapsto e^{At}$ dans le cas d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisable . . . . . | 518 |
| 9.4    | RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE AUTONOME . . . . .   | 522 |
| 9.4.1  | Résolution du problème homogène . . . . .   | 523 |
| 9.4.2  | Solution d'équilibre . . . . .  | 523 |
| 9.4.3  | Solution générale . . . . .   | 523 |
| 9.4.4  | Résolution du problème de Cauchy . . . . .  | 524 |
| 9.5    | RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE NON AUTO-<br>NOME . . . . .  | 526 |
| 9.5.1  | Résolution du problème homogène . . . . .   | 527 |
| 9.5.2  | Solution particulière . . . . .   | 527 |
| 9.5.3  | Solution générale . . . . .   | 528 |
| 9.5.4  | Résolution du problème de Cauchy . . . . .  | 528 |
| 9.6    | RESOLUTION NUMERIQUE . . . . .  | 531 |
| 9.6.1  | Méthode d'Euler-Cauchy . . . . .  | 532 |
| 9.6.2  | Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 . . . . .  | 532 |
| 9.6.3  | Simulation numérique . . . . .  | 533 |
| 9.7    | MODELES A COMPARTIMENTS EN BIOLOGIE . . . . .   | 536 |
| 9.7.1  | Un modèle à deux compartiments du métabolisme<br>hépatique . . . . .  | 538 |
| 9.7.2  | Modèle à compartiments en pharmacodynamique . . . . .   | 544 |
| 9.8    | MODELES PROIE(S)-PREDATEUR(S) . . . . .   | 546 |
| 9.9    | PROCESSUS CHIMIQUE . . . . .  | 554 |
| 9.9.1  | Modélisation mathématique de la cinétique des<br>réactions complexes . . . . .                                    | 554 |
| 9.9.2  | Réactions successives . . . . .   | 558 |
| 9.9.3  | Réactions compétitives en parallèle . . . . .   | 561 |
| 9.9.4  | Réduction du modèle cinétique . . . . .   | 563 |
| 9.9.5  | Lois de conservation . . . . .  | 571 |
| 9.10   | PROCESSUS BIOCHIMIQUE . . . . .   | 572 |
| 9.10.1 | Modèle dynamique de la cinétique enzymatique . . . . .  | 572 |
| 9.10.2 | Modèle dynamique de la cinétique enzymatique<br>avec inhibition compétitive . . . . .                             | 575 |
| 9.10.3 | Modèle quasi-statique de la cinétique enzymatique . . . . .   | 580 |
| 9.10.4 | Modèles quasi-statiques en biochimie . . . . .  | 583 |
| 9.11   | MODELE DE BIOREACTEUR . . . . .   | 587 |
| 9.12   | EXERCICES . . . . .   | 592 |

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>10 METHODE DES MOINDRES CARRES</b>                                    | <b>621</b> |
| 10.1 PRINCIPE DE LA METHODE . . . . .                                    | 621        |
| 10.2 MODELE MORPHOLOGIQUE POUR UNE COULEUVRE .                           | 623        |
| 10.3 UN SYSTEME PROIES-PREDATEUR : GNOUS, ZEBRES<br>ET LIONS . . . . .   | 625        |
| 10.3.1 Modèle Proies-Prédateur . . . . .                                 | 627        |
| 10.3.2 Identification des paramètres du modèle . . . . .                 | 628        |
| 10.3.3 Identification des paramètres biologiques du gnou                 | 628        |
| 10.3.4 Identification des paramètres biologiques du lion                 | 630        |
| 10.3.5 Identification des paramètres biologiques du zèbre                | 632        |
| 10.3.6 Modèle Proies-Prédateur à l'équilibre . . . . .                   | 634        |
| 10.3.7 Comparaison des résultats du modèle avec<br>les données . . . . . | 634        |
| 10.3.8 Prédiction . . . . .  | 636        |
| 10.4 EXERCICES . . . . .   | 640        |