Chapitre 1

ELEMENTS DE CALCUL DIFFERENTIEL

Le scientifique est régulièrement amené à décrire et étudier un système, c'est-à-dire un ensemble d'éléments dont l'état peut se modifier par suite des interactions internes ou des actions exercées par le milieu extérieur. Par exemple, le biologiste doit, pour modéliser une croissance microbienne, déterminer les variations du nombre de cellules ou de la masse cellulaire en fonction du temps. Le chimiste, qui étudie une réaction chimique donnée, doit suivre les variations en fonction du temps des concentrations des différents réactifs et produits de la réaction. Le contrôle d'une unité de fermentation microbienne dépend de nombreuses variables parmi lesquelles la biomasse, la température, les concentrations des dérivés métaboliques, le pH et la composition des gaz entrants et sortants. L'ingénieur doit alors pouvoir mesurer les effets de variations sur une ou plusieurs de ces variables sur la fermentation.

Ces questions et de nombreuses autres que nous aurons l'occasion d'examiner dans cet ouvrage suggèrent l'introduction d'outils mathématiques permettant d'évaluer la variation d'une variable par rapport à une autre.

1.1 QUELQUES NOTATIONS

Nous utiliserons dans cet ouvrage les notations ensemblistes usuelles (voir tableau des notations).

Remarque 1.1.1 Le signe " :" utilisé en notation ensembliste se traduit par "tel que". Par exemple, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ est l'ensemble des couples (x, y) de réels tels que $y = 2x$. Le même signe s'utilise dans d'autres contextes, ainsi une écriture du type "$(\forall x \in \mathbb{R}) : \ f(x) \geqslant 0$" signifie que la propriété $f(x) \geqslant 0$ est vérifiée pour tout réel x.

Remarque 1.1.2 Si $I \subset \mathbb{R}$ désigne un intervalle, alors nous noterons par $\bar{I}$ la fermeture de I :

$$\bar{I} = \{x \in \mathbb{R} : \ (\forall \ \varepsilon > 0) :]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I \ \neq \emptyset\}.$$

En appelant a et b les portes de l'intervalle, l'opération de fermeture consiste à fermer les portes qui sont ouvertes et laisser fermées celles qui le sont. Les portes infinies restent nécessairement toujours ouvertes. Par exemple :

$$\overline{]a, b[} = [a, b], \ \overline{]a, b]} = [a, b], \ \overline{]a, +\infty[} = [a, +\infty[.$$

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Dans ce livre, nous utiliserons la notation

$$f : A \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$$

pour désigner une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ (fonction numérique) et définie sur l'ensemble A, c'est-à-dire une loi qui à chaque élément x de A, associe un et un seul nombre réel appelé valeur de f en x et noté $f(x)$.

1.2 DERIVEE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

Nous supposons connues les notions de "limite d'une fonction de variable réelle" et de "continuité". La notion de dérivée sous sa forme analytique a été introduite en 1667 par le célèbre physicien, mathématicien et astronome anglais Isaac Newton. Cet illustre personnage est connu pour s'être pris en l'an 1666 une pomme sur la tête. Il s'est alors demandé pourquoi la Lune ne lui tombait pas également sur la tête. Il répondra alors à cette question en développant une théorie de la gravitation universelle dans ses *Principes mathématiques de philosophie naturelle* qui seront publiés en 1687. Le concept de dérivée y est énoncé en ces termes [63] : *"Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement les rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'en approchent toujours ; et vers lesquelles ils peuvent s'en approcher aussi près que toute différence donnée, mais dont ils ne peuvent jamais les dépasser ou atteindre avant que les quantités soient diminuées indéfiniment."*

1.2.1 Fonction continue

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$ une fonction. On dit que f est continue en $a \in I$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Cette définition signifie que la distance $|f(x) - f(a)|$ entre $f(x)$ et $f(a)$ peut être rendue aussi petite que l'on veut pour autant que x soit suffisamment proche de a. Plus rigoureusement, $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $(\forall\ x \in I) : (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Une fonction est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I. Autrement dit, une fonction continue sur I est une fonction définie sur I dont le graphe ne présente pas de point de rupture. Toutes les fonctions élémentaires (puissance, exponentielle, logarithme, cosinus, sinus, etc.) sont continues sur leur domaine de définition.

1.2.2 Définition et motivation de la dérivée

Soit I un intervalle non trivial (non vide et non réduit à un singleton) et $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$ une fonction. Nous utiliserons la notation

$$\Delta_x f(\Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

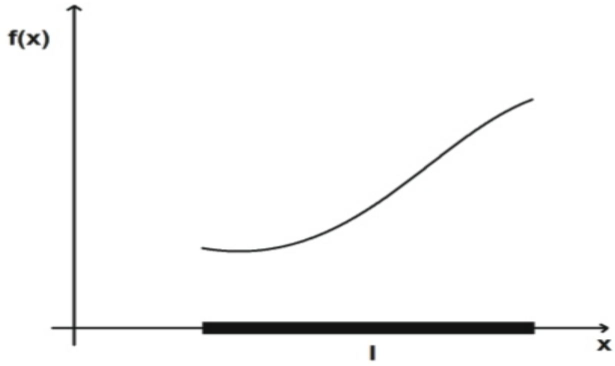

FIGURE 1.1 – Fonction continue sur I.

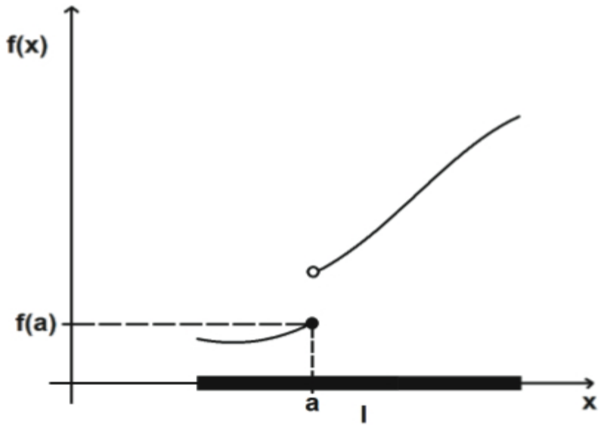

FIGURE 1.2 – Fonction discontinue en $a \in I$.

pour représenter la variation globale de la grandeur f résultante d'une variation Δx de la variable x. Le terme

$$\frac{\Delta_x f(\Delta x)}{\Delta x}$$

représente alors le taux moyen de variation de la grandeur f sur l'intervalle $[x, x + \Delta x]$ si $\Delta x > 0$ ou $[x + \Delta x, x]$ si $\Delta x < 0$.

Exemple 1.2.1 On considère la réaction chimique :

$$2HOF \rightarrow 2HF + O_2$$

à la température de 25 °C. Les résultats suivants ont été obtenus expérimentalement [46].

x = Temps (min)	$C(x)$ = Concentration en HOF au temps x (mol/l)
0	0.850
2	0.810
5	0.754
20	0.526
50	0.243

On note par $C(x)$ le nombre de moles (mol) de l'acide hypofluoreux HOF par litre (l) de solution après x minutes (min).

Soit $\Delta x > 0$. La concentration (molaire) en HOF au temps x est $C(x)$ et la concentration (molaire) en HOF au temps $x + \Delta x$ est $C(x + \Delta x)$. La variation globale de la concentration en HOF entre x et $x + \Delta x$ minutes est donnée par :

$$\Delta_x C(\Delta x) = C(x + \Delta x) - C(x).$$

Le taux moyen de variation de la concentration en HOF par minute sur l'intervalle de temps $[x, x + \Delta x]$ est alors donné par :

$$\frac{\Delta_x C(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}.$$

Le taux moyen de variation s'exprime ici en $mol.l^{-1}.min^{-1}$. Par exemple, la variation globale de la concentration en HOF entre 0 et 5 minutes est :

$$\Delta_0 C(5) = C(0 + 5) - C(0) = 0.754 - 0.850 = -0.096.$$

La concentration a donc diminué de 0.096 (mol/l) sur l'intervalle de temps $[0, 5]$ (min). le taux moyen de variation de la concentration en HOF entre 0 et 5 minutes est donné par :

$$\frac{\Delta_0 C(5)}{5} = \frac{C(0 + 5) - C(0)}{5} = -\frac{0.096}{5} = -0.0192.$$

La vitesse moyenne de disparition du HOF sur l'intervalle de temps $[0,5]$ (min) est donc de 0.0192 $mol.l^{-1}.min^{-1}$. la variation globale de la concentration en HOF entre 5 et 50 minutes est :

$$\Delta_5 C(45) = C(5+45) - C(5) = -0.511.$$

La concentration a donc diminué de 0.511 (mol/l) sur l'intervalle de temps $[5,50]$ (min). le taux moyen de variation de la concentration en HOF entre 5 et 50 minutes est donné par :

$$\frac{\Delta_0 C(5)}{5} = \frac{C(5+45) - C(5)}{45} = -\frac{0.511}{45} \simeq -0.0114.$$

La vitesse moyenne de disparition du HOF sur l'intervalle de temps $[5,50]$ (min) est donc de 0.0114 $mol.l^{-1}.min^{-1}$.

Définition 1.2.1 On dit que f est dérivable en $x \in I$ si la limite

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0,\ \Delta x \neq 0,\\ x+\Delta x \in I}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.2.1}$$

existe. On note alors cette limite $f'(x)$ ou $\frac{df}{dx}(x)$ et on l'appelle dérivée (première ou d'ordre 1) de f en x.

Cette définition signifie que la distance entre $f'(x)$ et $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ peut être rendue aussi petite que l'on veut pour autant que Δx soit suffisamment proche de 0. Plus rigoureusement, en notant $A(x) = (I - x)\backslash\{0\} = \{h \in \mathbb{R}^* :\ x + h \in I\}$ et en utilisant un langage abstrait mais précis, on dira que f a pour dérivée $f'(x)$ en x si $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $(\forall\ \Delta x \in A(x)) : |\Delta x| < \delta \implies |f'(x) - \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}| < \varepsilon.$

Remarque 1.2.1 La dérivée de f en x mesure le taux instantané de variation de f en x.

Par la suite, nous utiliserons l'écriture simplifiée suivante pour la limite en (1.2.1) :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Les conditions $\Delta x \neq 0$ et $x + \Delta x \in I$ sont en effet implicites au sens même de la limite puisque l'écriture du terme $f(x+\Delta x)$ suppose $x+\Delta x$ dans I et celle du quotient différentiel $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ exige $\Delta x \neq 0$.

Si la fonction est dérivable en tout point de I alors on dit qu'elle est dérivable sur I et on peut lui associer sa fonction dérivée
$f' : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$.

Remarque 1.2.2 Soit $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$ une fonction dérivable et $a \in I$. La droite passant par $(a, f(a))$ et de coefficient angulaire $f'(a)$ représente une fonction affine notée $T_a f$:

$$T_a f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto T_a f(x) = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Cette droite est appelée droite tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$.

Le graphe ci-dessous fournit une interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction en un point. Le coefficient angulaire de la droite D_{AB} passant par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (a + \Delta a, f(a + \Delta a))$ est donné par :

$$\frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a}.$$

Lorsque le point B se rapproche du point A, la droite D_{AB} tend vers la droite dont le coefficient angulaire se calcule par la limite :

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a} = f'(a). \qquad (1.2.2)$$

La droite limite est donc la tangente à f en a.

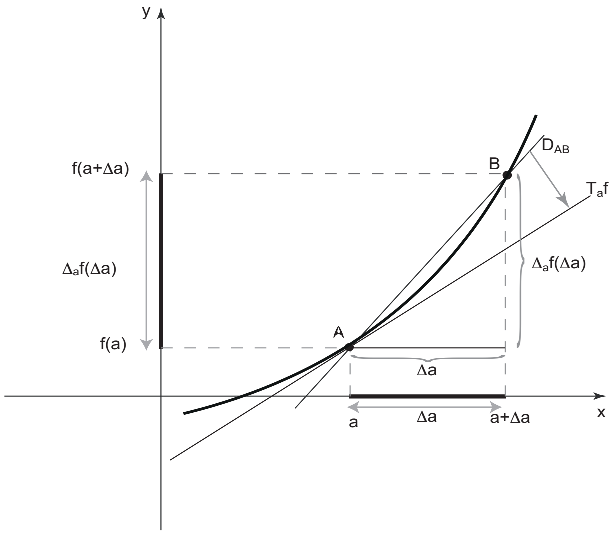

FIGURE 1.3 – Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction en un point.

Si Δa est proche de 0, c'est-à-dire $|\Delta a| \simeq 0$ alors de la limite (1.2.2), on déduit que

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a}$$

et donc

$$f(a+\Delta a) \simeq T_a f(a+\Delta a).$$

On peut donc localement, au voisinage de a (pour des petites valeurs de Δa), approcher $f(a+\Delta a)$ par $T_a f(a+\Delta a)$. On dit ainsi que la tangente à une fonction en un point fournit une approximation affine locale de cette fonction.

Remarque 1.2.3 La dérivabilité exige la continuité au sens où une fonction dérivable en un point est nécessairement continue en ce point.

Exemple 1.2.2 Les microorganismes sont dans les installations industrielles cultivés dans des fermenteurs. Une unité de fermentation typique est formée d'une cuve cylindrique. Le volume d'une cuve cylindrique de rayon R et de hauteur h est donné par :

$$V = \pi R^2 h.$$