CHAPITRE I

Rappels d'analyse vectorielle

L'étude de l'électromagnétisme fait usage d'un certain nombre d'outils d'analyse vectorielle. L'objet de cette partie du cours est de rappeler les expressions mathématiques de ces outils dans les systèmes de coordonnées couramment utilisés.

1. Notions fondamentales sur les vecteurs

Dans un repère directe ($(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ de coordonnées orthogonales (cartésiennes, cylindriques ou sphériques) deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ s'écrivent sous la forme

$$\vec{A} = A_1\,\hat{e}_1 + A_2\,\hat{e}_2 + A_3\,\hat{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_1\,\hat{e}_1 + B_2\,\hat{e}_2 + B_3\,\hat{e}_3$$

Dans ces conditions, on a

- **Somme et différence de deux vecteurs**

$$\left(\vec{A} \pm \vec{B}\right) = \left(A_1 \pm B_1\right)\hat{e}_1 + \left(A_2 \pm B_2\right)\hat{e}_2 + \left(A_3 \pm B_3\right)\hat{e}_3 \qquad (1)$$

- **Produit scalaire de deux vecteurs**

$$S = \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos\theta \quad \left[\theta : \text{angle } \left(\vec{A}, \vec{B}\right)\right] \qquad (2)$$

Si les normes $\left|\vec{A}\right|$ et $\left|\vec{B}\right|$ représentent des longueurs alors S est la surface $\left|\vec{A}\right| \cos\theta \left|\vec{B}\right|$ (cf. fig. 1).

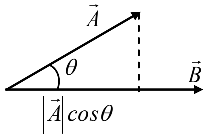

Fig. 1 Représentation graphique du produit scalaire.

- **Produit vectoriel de deux vecteurs**

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \cdot \vec{A} = \left(A_2B_3 - A_3B_2\right)\hat{e}_1 + \left(A_3B_1 - A_1B_3\right)\hat{e}_2 + \left(A_1B_2 - A_2B_1\right)\hat{e}_3 \qquad (3a)$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{vmatrix} \qquad (3b)$$

La direction et le sens du vecteur résultant $\vec{C}$ sont données par la règle du tire-bouchon de Maxwell (fig. 2a). La rotation de la main droite se fait de vers $\vec{A}$ vers $\vec{B}$ et le pouce indique la direction et le sens de $\vec{C}$. Autrement dit, les trois vecteurs $\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right)$ forment un trièdre direct.

Géométriquement, le module du vecteur $\vec{C}$ défini par

$$S=\left|\vec{C}\right|=\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta \quad \left[\theta : \text{angle } \left(\vec{A},\vec{B}\right)\right] \tag{3c}$$

illustre la surface (fig. 2b) délimitée par ces deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Fig. 2 Représentation graphique du produit vectoriel.

- **Produit mixte**

C'est une opération mathématique, faisant intervenir trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$, définie comme suit

$$S=\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) \tag{4a}$$

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire, autrement dit on peut écrire

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right) \tag{4b}$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{4c}$$

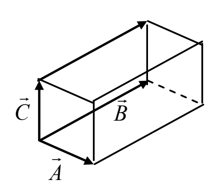

Fig. 3 Volume illustrant le produit mixte.

Géométriquement, le produit mixte mesure le volume (fig. 3) construit sur la base des trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.

- **Double produit vectoriel**

Il est défini par l'expression

$$\vec{D}=\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C} \tag{5}$$

- **Dérivation de vecteurs**

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}+\vec{B}\cdot\frac{d\vec{A}}{du} \tag{6a}$$

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}+\vec{B}\times\frac{d\vec{A}}{du} \tag{6b}$$

2. Systèmes de coordonnées

Le système de coordonnées cartésiennes est généralement le plus connu et il est très utile dans l'étude de mouvements rectilignes. Cependant, il existe des situations physiques (calcul du champ électrique en électrostatique, magnétostatique, rayonnement des antennes...) où l'utilisation de ce système s'avère complexe. Il serait donc plus judicieux d'opter pour d'autres systèmes de coordonnées. En électromagnétisme, on utilise souvent les coordonnées polaires (en 2D), les coordonnées cylindriques et sphériques en 3D.

2.1 Représentation à deux dimensions (2D).

Il s'agit des coordonnées cartésiennes (x, y) et polaires (r, θ) illustrés par les figures 4a et 4b.

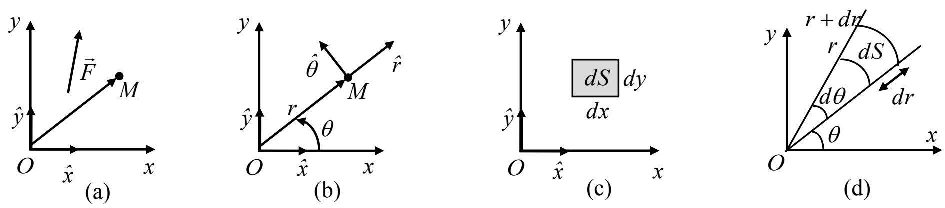

Fig. 4 Cordonnées cartésiennes et coordonnées sphériques.

a) Coordonnées cartésiennes

- Un point M, du plan xy (fig. 4a) est défini par ses coordonnées (x, y) et on écrit $M(x, y)$ ou encore

$$\overrightarrow{OM}=x\,\hat{x}+y\hat{y} \tag{7a}$$

$\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont les vecteurs unitaires associées aux axes x et y.

- Un champ scalaire $\quad U(M)=U(x, y)$ (7b)

- Un champ de vecteurs $\quad \vec{F}(M)=\vec{F}(x, y)=F_x(x, y)\hat{x}+F_y(x, y)\hat{y}$ (7c)

- Elément déplacement $\quad d\vec{l}=d_x\hat{x}+d_y\hat{y}$ (7d)

- Elément de surface (fig.4c) $\quad dS=d_x d_y$ (7e)

b) Coordonnées polaires

En coordonnées polaires (fig. 4b), un point M est défini par les coordonnées (r,θ). On écrit $M(r,\theta)$ ou $\overrightarrow{OM} = r\,\hat{r}$. $0 \le r \le \infty$ et $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ x = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\theta = y/x \end{cases} \tag{8a}$$

Les vecteurs unitaires $(\hat{r},\hat{\theta})$ sont définis par

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y} \\ \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y} \end{cases} \quad \text{ou inversement} \quad \begin{cases} \hat{x} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta} \\ \hat{y} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta} \end{cases} \tag{8b}$$

- Un champ scalaire $U(M) = (r,\theta)$ (8c)
- Un champ de vecteurs $\vec{F}(M) = \vec{F}(r,\theta) = F_r(r,\theta)\hat{r} + F_\theta(r,\theta)\,\hat{\theta}$ (8d)
- Elément déplacement $d\vec{l} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta}$ (8e)
- Elément de surface (fig. 4d) $dS = r\,dr\,d\theta$ (8f)

2.2 Représentation à trois dimensions (3D).

a) Coordonnées cartésiennes $(x, y z)$ (fig. 5)

- Un point M de l'espace est défini par ses coordonnées (x,y,z) comme suit

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \text{ ou } M(x, y z)\,. \tag{9a}$$

$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$: vecteurs unitaires associés respectivement aux axes x, y et z.

- Un champ scalaire $U(M)$ est définit $U(x,y,z)$ (9b)

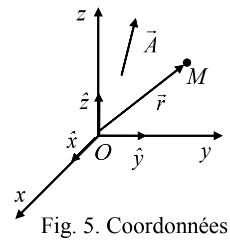

Fig. 5. Coordonnées cartésiennes.

- Un vecteur $\vec{A}$ est définit par ses composantes

$$\vec{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\hat{x} + A_y(x,y,z)\hat{y} + A_z(x,y,z)\hat{z} \tag{9c}$$

- Elément de longueur: un déplacement infinitésimal du point M vers un point M' (fig. 6a) s'écrit

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{l} = dx\,\hat{x} + d_y\,\hat{y} + dz\,\hat{z} \tag{9d}$$

- Un volume infinitésimal est un parallélépipède (fig. 6b) de volume

$$d\tau = dx\,d_y dz \tag{9e}$$

- Elément de surface (fig. 6b)

$$\begin{cases} dS_x = dydz & (x : \text{fixé}) \\ dS_y = dxdz & (y : \text{fixé}) \\ dS_z = dxdy & (z : \text{fixé}) \end{cases} \qquad (9f)$$

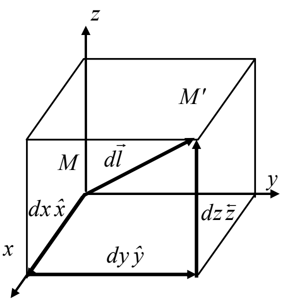

Fig. 6a Elément de longueur.

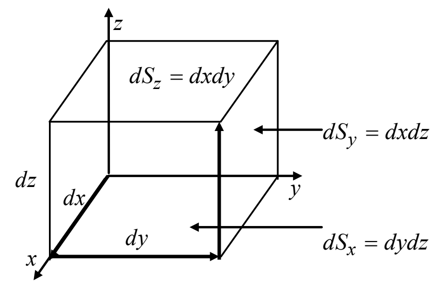

Fig. 6b Eléments de surface.

b) Coordonnées cylindriques (r, θ, z)

- Un point M est localisé par les coordonnées (r, θ, z) et on écrit

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r\,\hat{r} + z\,\hat{z} \qquad \text{(fig. 7a)} \qquad (10a)$$

avec $0 \le r \le \infty$; $0 \le \theta \le 2\pi$ et $-\infty \le z \le \infty$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \qquad (10b)$$

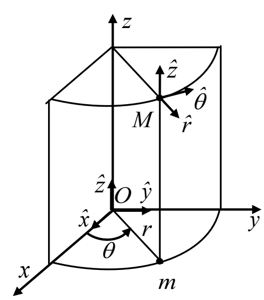

Fig.7a. Coordonnées cylindriques.

- Champ scalaire $U(M)$ est définit $U(r, \theta, z)$ (10c)

- Un champ de vecteurs $\vec{A}(r, \theta, z)$ est défini par ses composantes

$$\vec{A}(r,\theta,z) = A_r(r,\theta,z)\hat{r} + A_\theta(r,\theta,z)\hat{\theta} + A_z(r,\theta,z)\hat{z} \qquad (10d)$$

- Elément de longueur (fig. 7b)

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + dz\,\hat{z} \qquad (10e)$$

- Elément de volume

$$d\tau = dr(rd\theta)dz = rdrdzd\theta \qquad (10f)$$

• Elément de surface (fig. 7c)
$$\begin{cases} dS_r = rd\theta dz & (r : \text{fixé}) \\ dS_\theta = drdz & (\theta : \text{fixé}) \\ dS_z = rdrd\theta & (z : \text{fixé}) \end{cases} \quad (10g)$$

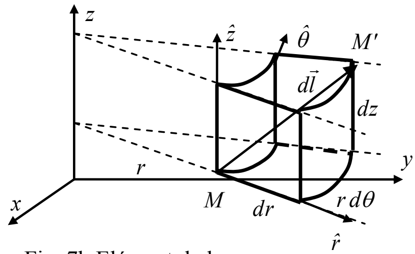

Fig. 7b Elément de longueur en coordonnées cylindriques.

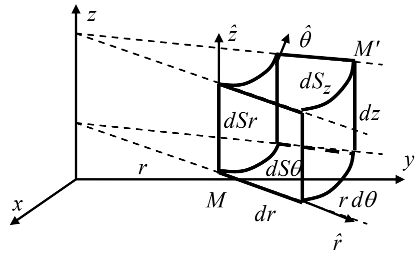

Fig. 7c Eléments de surface en coordonnées cylindriques.

• **Transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques et inversement**

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \quad (10h)$$

c) Coordonnées sphériques (r, θ, φ) (fig. 8a)

- Un point M est localisé par les coordonnées (r, θ, φ)

$$\overrightarrow{OM} = r\,\hat{r} \quad (11a)$$

Champ scalaire $U(M) = U(r, \theta, \varphi)$ (11b)

$0 \le r \le \infty$, $0 \le \theta \le \pi$ et $0 \le \varphi \le 2\pi$

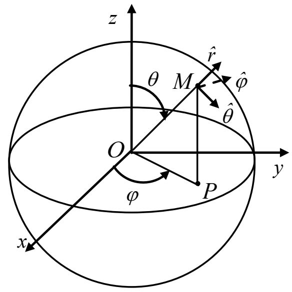

Fig. 8a Coordonnées sphériques.

- Un vecteur $\vec{A}$ est définit par ses composantes

$$\vec{A}(r,\theta,\varphi) = A_r(r,\theta,\varphi)\hat{r} + A_\theta(r,\theta,\varphi)\hat{\theta} + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\hat{\varphi} \quad (11c)$$

- Elément de longueur : $d\vec{l} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\varphi\,\hat{\varphi}$ (11d)

• Volume élémentaire : $d\tau = dr\,(rd\theta)(r\sin\theta\, d\varphi) = r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ (11e)

• Surfaces élémentaires (fig. 8b)

$$\begin{cases} dS_r = (rd\theta)(r\sin\theta\, d\varphi) = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad (r : \text{fixé}) \\ dS_\theta = dr(r\sin\theta\, d\varphi) = r\, dr\, \sin\theta\, d\varphi \quad (\theta : \text{fixé}) \\ dS_\varphi = dr(rd\theta) = r\, dr\, d\theta \quad (\varphi : \text{fixé}) \end{cases} \tag{11f}$$

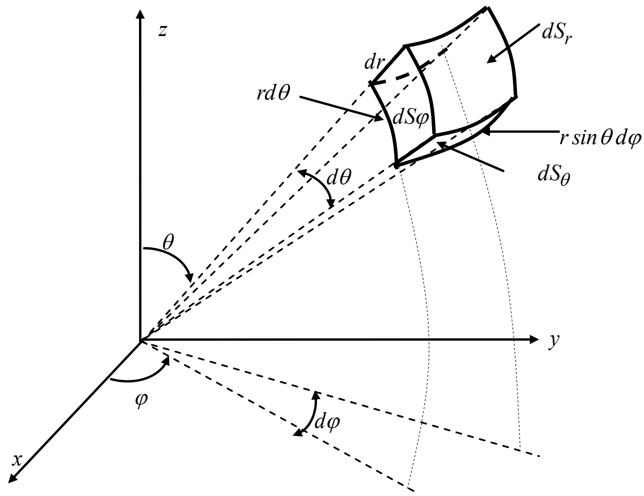

Fig. 8b Eléments de surface et volume élémentaire.

- **Relations entre les coordonnées cartésiennes et sphériques**

Les relations de passage des coordonnées cartésiennes en

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ tg\theta = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{11g}$$

Formules de transformation

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \tag{11h}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} \tag{11i}$$

2.3 Elément d'angle solide

a) Angle solide élémentaire

Par définition l'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit une surface élémentaire $d\vec{S}$ à partir d'un point O (fig. 8c) est

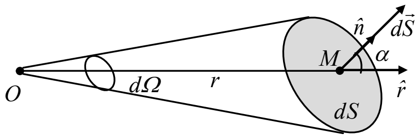

Fig. 8c Illustration d'un angle solide élémentaire.

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}}{r^2}\hat{r} = \frac{dS}{r^2}(\hat{n}\cdot\hat{r}) = \frac{dS}{r^2}\cos\alpha \qquad (12a)$$

Dans le cas ou l'élément de surface dS est pris sur une sphère de centre O et de rayon r (fig. 8d), alors on a $\hat{n} = \hat{r}$. Dans ces conditions, on obtient

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad (12b)$$

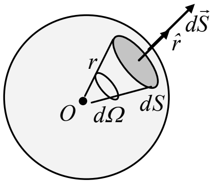

Fig. 8d Angle solide élémentaire dans le cas d'une sphère.

- Pour la Sphère entière (espace entier), on a

$$\Omega = \iint_{Sphère} d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi \text{ Stéradians.}$$

- Pour un demi-espace $0 \le \theta \le \pi/2$ et $\Omega = 2\pi$ Stéradians.

3. Gradient, divergence, rotationnel et laplacien

3. 1 L'opérateur différentiel Nabla

L'opérateur différentiel vectoriel, noté $\vec{\nabla}$, est très utile en analyse vectorielle. Il permet de déterminer les notions de gradient, de la divergence, du rotationnel et du Laplacien de manière simple et concise. Cet opérateur, défini uniquement en coordonnées cartésiennes s'exprime comme suit

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \qquad (13)$$

Il peut être appliqué, sous certaines conditions, à des fonctions scalaires ou vectorielles.

3.2 Gradient d'une fonction scalaire

Le gradient d'une fonction scalaire $f(\vec{r})$, noté $\overrightarrow{grad}\, f(\vec{r})$ ou $\vec{\nabla} f(\vec{r})$ est un vecteur défini par

$$d\,f = \vec{\nabla} f(\vec{r})\cdot d\vec{l} \qquad (14a)$$

a) Coordonnées cartésiennes $f(x,y,z)$

$$\overrightarrow{grad} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \qquad (14b)$$