Chapitre 0

L'intégration au sens de Riemann

L'objet de ce chapitre est d'exposer sous forme de thème d'étude la théorie de l'intégration au sens de Riemann. Les outils mathématiques utilisés dans les démonstrations ne font appel qu'à des concepts vus en première et deuxième années de licence.

0.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ (on supposera toujours dans la suite que a et b sont des réels avec $a < b$).

On appelle **subdivision** σ **de** $[a, b]$, la donnée d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et d'une suite de $n+1$ réels $x_0, x_1, ..., x_n$ telle que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. On notera $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ la subdivision ainsi définie et $\Sigma_{a,b}$ l'ensemble des subdivisions du segment $[a, b]$.

Le réel $|\sigma| := \max\{|x_i - x_{i-1}|, i = 1, ..., n\}$ est appelé le **pas de la subdivision** σ . On le notera $|\sigma|$.

Si $\sigma' = (x'_i)_{0\leq i\leq p}$ est une autre subdivision de $[a, b]$, on note $\sigma \leq \sigma'$ pour exprimer que $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq \{x'_0, ..., x'_p\}$, et on note $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision obtenu en "réunissant" les subdivisions σ et σ', en réordonnant leurs termes puis en les renumérotant.

Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ bornée (i.e. il existe un réel $B \geq 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b], |f(x)| \leq B$) et $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a, b]$.
On note $d(f, \sigma) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i$ et $D(f, \sigma) := \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i$ où,

pour tout $i = 1, 2, ..., n$, $m_i := \inf_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x)$ et $M_i := \sup_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x)$. La somme d (resp. D) est appelée **somme de Darboux inférieure** (resp. **supérieure**) **de** f **attachée à la subdivision** σ**.**

Proposition 0.1. *Avec les notations précédentes, si* σ *et* σ' *sont deux subdivisions de* $[a, b]$,

i) les sommes de Darboux $d(f, \sigma)$ *et* $D(f, \sigma)$ *sont des réels vérifiant l'inégalité* $d(f, \sigma) \leq D(f, \sigma)$ *;*

ii) si de plus $\sigma \leq \sigma'$*, alors* $d(f, \sigma) \leq d(f, \sigma')$ *et* $D(f, \sigma) \geq D(f, \sigma')$ *;*

iii) dans tous les cas, $d(f, \sigma) \leq D(f, \sigma')$*.*

Indication de démonstration : Pour iii) définir $\tau := \sigma \cup \sigma'$ et conclure avec i) et ii).

Proposition 0.2. *L'ensemble de réels* $\{D(f, \sigma) \ / \ \sigma \in \Sigma_{a,b}\}$ *admet une borne inférieure dans* $\mathbb{R}$ *qu'on notera* $D(f)$*.*
L'ensemble de réels $\{d(f, \sigma) \ / \ \sigma \in \Sigma_{a,b}\}$ *admet une borne supérieure dans* $\mathbb{R}$ *qu'on notera* $d(f)$*.*
De plus, $d(f) \leq D(f)$*.*

Indication de démonstration : Montrer que $\{D(f, \sigma) \ / \ \sigma \in \Sigma_{a,b}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, minorée dans $\mathbb{R}$. De même, montrer que $\{d(f, \sigma) \ / \ \sigma \in \Sigma_{a,b}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, majorée dans $\mathbb{R}$. Conclure.

On dit qu'une application f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est **intégrable au sens de Riemann** si f est bornée et si $d(f) = D(f)$.
On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt := D(f) = d(f),$$

et on dit que le réel $\int_a^b f(t)dt$ est **l'intégrale de** f **au sens de Riemann sur l'intervalle fermé borné** $[a, b]$.

Nous allons étudier maintenant un premier critère d'intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction bornée.

Proposition 0.3. Critère de Darboux
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *bornée. La fonction* f *est intégrable au sens de Riemann si, et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une subdivision* σ *de* $[a, b]$ *telle que* $|D(f, \sigma) - d(f, \sigma)| < \varepsilon$*.*

Indication de démonstration : Pour la condition nécessaire, soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe deux subdivisions σ' et $\sigma'' \in \Sigma_{a,b}$ telles que

$$\int_a^b f(t)dt - \frac{\varepsilon}{2} \leq d(f, \sigma') \leq \int_a^b f(t)dt$$

et
$$\int_a^b f(t)dt \leq D(f,\sigma'') \leq \int_a^b f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Considérer alors la subdivision $\sigma := \sigma' \cup \sigma''$ et conclure.

Proposition 0.4. *Soit $\mathcal{R}_{a,b}$ l'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ intégrables au sens de Riemann.*

i) $\mathcal{R}_{a,b}$ est un espace vectoriel réel et l'application $f \in \mathcal{R}_{a,b} \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur $\mathcal{R}_{a,b}$.

ii) Pour tout $f, g \in \mathcal{R}_{a,b}$, si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

iii) Pour tout $f \in \mathcal{R}_{a,b}$,
$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq (b-a) \sup\left\{|f(x)|, a \leq x \leq b\right\}.$$

*iv) Pour tout $f \in \mathcal{R}_{a,b}$ où c est un réel tel que $a < c < b$, on a la **relation de Chasles** :*
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Indication de démonstration : Pour i), considérer $f, g \in \mathcal{R}_{a,b}$ et montrer que pour $\sigma \in \Sigma_{a,b}$ on a :
$$d(f,\sigma) + d(g,\sigma) \leq d(f+g,\sigma) \leq D(f+g,\sigma) \leq D(f,\sigma) + D(g,\sigma).$$
Utiliser alors le critère de Darboux pour montrer que $f+g$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ et que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\left| \int_a^b (f+g)(t)dt - \left(\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \right) \right| \leq \varepsilon.$$
Procéder de même avec λf où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour les autres items utiliser les sommes de Darboux de f et g et la définition de l'intégrabilité de f et de g.

0.2 Caractérisation des fonctions intégrables au sens de Riemann

Une partie A de $\mathbb{R}$ sera dite **négligeable** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite finie ou infinie, $(]a_n, b_n[)_I$ où $I \subseteq \mathbb{N}$, d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ telle que
$$A \subseteq \bigcup_{n \in I}]a_n, b_n[\quad \text{et} \quad \sum_{n \in I} |b_n - a_n| \leq \varepsilon.$$

Énonçons un résultat préliminaire.

Proposition 0.5. *Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable. Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. En particulier, tout ensemble dénombrable est négligeable.*

On admettra la caractérisation suivante des fonctions bornées qui sont intégrables au sens de Riemann :

Proposition 0.6. *Soit f une fonction bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est intégrable au sens de Riemann si, et seulement si, l'ensemble des points de $[a, b]$ où f est discontinue est négligeable.*

D'après les propriétés des fonctions monotones, la proposition précédente a pour corollaire :

Proposition 0.7. *Toute application continue (resp. monotone) sur un segment $[a, b]$ est inté-grable au sens de Riemann.*

Indication de démonstration : Toute fonction monotone sur un intervalle admet au plus une infinité dénombrable de discontinuités (cf [2], p.156).

Proposition 0.8. Théorème de la moyenne
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors il existe un réel $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Indication de démonstration : Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Proposition 0.9. Premier théorème fondamental du calcul intégral
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Posons, pour tout $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et, pour tout $x \in]a, b[$, $F'(x) = f(x)$.

Indication de démonstration : Exprimer $F(x + h) - F(x)$ et utiliser le théorème de la moyenne.

0.3 Sommes de Riemann d'une fonction

Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ et $s = (s_j)_{1 \leq j \leq n}$ une suite de réels telle que, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $s_j \in]x_{j-1}, x_j[$, ce qu'on notera $s \in \sigma$.
On appelle **somme de Riemann de f attachée à σ et à s** , et on note $S(f, \sigma, s)$, le réel

$$S(f, \sigma, s) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(s_i).$$

Proposition 0.10. *Une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si, et seulement si, il existe une réel $I(f)$ vérifiant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $\sigma \in \Sigma_{a,b}$ avec $|\sigma| < \eta$ et tout $s \in \sigma$, $|S(f,\sigma,s) - I(f)| < \varepsilon$. Dans ce cas $I(f) = \int_a^b f(t)dt$.*

Cette proposition signifie que la somme de Riemann $S(f,\sigma,s)$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$ lorsque $|\sigma|$ tend vers 0 avec $\sigma \in \Sigma_{a,b}$ et $s \in \sigma$.

Indication de démonstration : Pour la condition nécessaire, montrer que $|S(f,\sigma,s) - \int_a^b f(t)dt| \leq D(f,\sigma) - d(f,\sigma)$ et utiliser le critère de Darboux.
Pour la condition suffisante, montrer que f est bornée sur $[a,b]$ en commençant par choisir une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ telle que, pour tous $s \in \sigma$ et $s' \in \sigma$,

$$|S(f,\sigma,s) - S(f,\sigma,s')| \leq 2.$$

Choisir ensuite $s = (s_i)_{1\leq i\leq n}$ et $s' = (s'_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que $s_1 \neq s'_1$ et, pour tout $i = 2,...,n$, $s_i = s'_i$. Conclure que f est bornée sur $[x_0,x_1]$. Réitérer le raisonnement sur $[x_{i-1},x_i]$ pour $i = 2,3,...,n$.
Pour montrer que $d(f) = D(f)$, remarquer que

$$\begin{aligned}|D(f,\sigma) - d(f,\sigma)| \leq \quad & |D(f,\sigma) - S(f,\sigma,s)| + |S(f,\sigma,s) - I(f)| \\ + \quad & |I(f) - S(f,\sigma,s')| + |S(f,\sigma,s') - d(f,\sigma)|\end{aligned}$$

où $s \in \sigma$ et $s' \in \sigma$, pour une subdivision σ de $[a,b]$. Utiliser le critère de Darboux (on prendra d'abord un σ convenable pour majorer les termes avec $I(f)$ puis on choisira judicieusement s et s').

Proposition 0.11. Second théorème fondamental du calcul intégral
Soit f une application continue sur $[a,b]$, F une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Indication de démonstration : Écrire $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))$ pour une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque $[x_{i-1},x_i]$. Conclure à l'aide de la proposition précédente.

Bibliographie : [11], pp. 98-116 ; [2].

Chapitre 1

Tribus et applications mesurables

1.1 Rappels de cours

1.1.1 Préliminaires

Certaines définitions de la théorie élémentaire des ensembles seront constamment utilisées dans la suite. Afin d'ôter toute ambiguité nous les rappelons dans ce paragraphe.

Un ensemble quelconque est dit **dénombrable** s'il peut être mis en bijection avec une partie (finie ou infinie) de $\mathbb{N}$.

Si A et B sont deux parties d'un ensemble Ω, on pose :

1. $A^c := \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \notin A\}$ (noté aussi $C_\Omega A$) appelé **complémentaire de** A.
2. $A \setminus B := A \cap B^c$ appelé **différence ensembliste de** A **et** B.
3. $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ appelé **différence ensembliste symétrique de** A **et** B.

Soit $f : \Omega \to E$ une application de Ω dans un ensemble E. Si A est une partie de E, l'ensemble $f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega \ / \ f(\omega) \in A\}$ est appelé **l'image réciproque de** A **par** f . En théorie de la mesure (et surtout en probabilités) on note souvent cet ensemble $\{f \in A\}$.

Voici quelques propriétés de l'image réciproque :

Proposition 1.1. *Soit f une application de Ω dans un ensemble E.*

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. *Si A et B sont deux parties de Ω avec $A \subseteq B$, alors $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.*
3. *Si $(A_i)_I$ est une famille quelconque de parties de Ω, alors*
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$
4. *Si A est une partie de Ω, $C_\Omega\left(f^{-1}(A)\right) = f^{-1}\left(C_E A\right)$.*

L'indicatrice d'une partie A de Ω est l'application, notée $\mathbb{1}_A$, de Ω dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $\omega \in \Omega$, par $\mathbb{1}_A(\omega) := 0$ si $\omega \notin A$ et $\mathbb{1}_A(\omega) := 1$ si $\omega \in A$.
Si f est une application d'une partie B de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ et si A est une partie de B, on notera $f\mathbb{1}_A$ l'application g de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie, pour tout $\omega \in \Omega$, par $g(\omega) = f(\omega)$ si $\omega \in A$, $g(\omega) = 0$ sinon.

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ appelé **droite réelle achevée**. On étend l'ordre usuel de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$. La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est munie de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de $\mathbb{R}$ et les complémentaires dans $\overline{\mathbb{R}}$ des compacts de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est alors un sous-espace topologique de $\overline{\mathbb{R}}$.

1.1.2 Tribus et espaces mesurables

Dorénavant Ω désignera un ensemble quelconque. Une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω est appelée **une tribu sur Ω** , ou **une σ-algèbre sur Ω** , si elle vérifie les trois axiomes suivants :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. pour toute partie A de Ω, si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^c \in \mathcal{F}$ (stabilité par passage au complémentaire) ;
3. pour toute suite $(A_n)_{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, on a $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$ (stabilité pour l'union dénombrable).

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ s'appelle **un espace mesurable** et les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés **ensembles mesurables de Ω** .
On notera bien que $\mathcal{F}$ est un ensemble de parties de Ω et donc une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Par exemple $\{\emptyset, \Omega\}$, l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω, sont des tribus sur Ω. La famille de parties A de $\mathbb{R}$, telle que A est dénombrable ou A^c est dénombrable, est une tribu sur $\mathbb{R}$.S

Proposition 1.2. *Si $\mathcal{F}$ est une tribu et $(A_n)_{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ alors $\bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$.*

Proposition 1.3. *L'intersection d'une famille quelconque de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.*

Par contre la réunion de deux tribus sur Ω n'est pas nécessairement une tribu sur Ω.

Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de Ω. L'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{C}$. Elle est appelée **la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ sur Ω** et notée $\sigma_\Omega(\mathcal{C})$ ou plus simplement $\sigma(\mathcal{C})$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. La famille des tribus contenant $\mathcal{C}$ est non vide car $\mathcal{P}(\Omega)$ appartient à cette famille.

Proposition 1.4.

1. *Soit $f : \Omega \to E$ une application et $\mathcal{E}$ une tribu sur E. Alors la famille des parties $A \subseteq \Omega$, telles qu'il existe une partie $B \in \mathcal{E}$ vérifiant $A = f^{-1}(B)$, est une tribu sur Ω appelée* **image réciproque de $\mathcal{E}$ par f** *et notée $f^{-1}(\mathcal{E})$.*
2. *Soit $X \subseteq \Omega$ et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. Alors la famille des parties de la forme $A \cap X$, où la partie A parcourt $\mathcal{F}$, est une tribu sur X appelée* **tribu-trace sur X de la tribu $\mathcal{F}$** *.*

Supposons Ω muni d'une topologie $\mathcal{T}$. On appelle **tribu de Borel de Ω** (ou **tribu borélienne**) et on note $\mathcal{B}(\Omega)$, la tribu $\sigma(\mathcal{T})$ c-à-d la plus petite tribu sur Ω contenant les ouverts de Ω pour la topologie $\mathcal{T}$. Les éléments de $\mathcal{B}(\Omega)$ sont appelés **les boréliens de Ω** . On supposera toujours, sauf mention explicite contraire, qu'un espace topologique est muni de sa tribu borélienne.

Les cas les plus fréquents sont ceux de $\mathbb{R}$ ou de $\overline{\mathbb{R}}$ munis de leurs topologies usuelles. Contrairement à ce que l'on pourrait penser la tribu de Borel de $\mathbb{R}$ n'est pas égale à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Proposition 1.5. *$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu-trace sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.*

1.1.3 Applications mesurables

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables. Une application $f : \Omega \to E$ est dite **$(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-mesurable** si, pour tout $A \in \mathcal{E}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Si E est un espace topologique et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$, on dit simplement **$\mathcal{F}$-mesurable** pour $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-mesurable. C'est en particulier le cas lorsque E est une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la topologie usuelle.

Si Ω et E sont des espaces topologiques, on dit que $f : \Omega \to E$ est **borélienne** pour exprimer qu'elle est $(\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{B}(E))$-mesurable.