CHAPITRE 1

NOTIONS FONDAMENTALES

§ 1. Espaces des phases et flots

La théorie des équations différentielles ordinaires constitue l'un des principaux instruments des mathématiques. Elle permet d'étudier quantité de processus d'évolution *déterministes, finis et différentiables.* Avant de donner à ces processus une définition mathématique rigoureuse examinons quelques exemples.

1. Exemples de processus d'évolution. On dit d'un processus qu'il est *déterministe* si toute son évolution et son passé sont univoquement définis par son état présent. L'ensemble de tous les états de ce processus s'appelle *espace des phases.*

Ainsi, en mécanique classique, on étudie le mouvement de systèmes dont l'avenir et le passé sont univoquement définis par les positions et les vitesses initiales de tous les points du système. L'espace des phases de ce système mécanique est un ensemble dont les éléments sont constitués par l'ensemble des positions et vitesses de tous les points du système considéré.

En mécanique quantique, le mouvement des particules n'est pas un processus déterministe. La propagation de la chaleur, elle, est un processus semi-déterministe en ce sens que son avenir est déterminé par son présent, tandis que son passé ne l'est pas.

Un processus est *de dimension finie* si son espace des phases est de dimension finie, i.e. si est fini le nombre des paramètres indispensables à la description de son état. Tel est en mécanique classique par exemple, le cas d'un système constitué d'un nombre fini de points matériels ou de corps solides. La dimension de l'espace des phases est de $6n$ pour un système de n points matériels et de $12n$ pour un système de n solides. Les mouvements des fluides en hydrodynamique, les oscillations de la corde et de la membrane, la propagation des ondes en optique et en acoustique sont des exemples de processus qu'il est impossible de décrire dans un espace des phases de dimension finie.

Un processus est *différentiable* si son espace des phases est muni d'une structure de variété différentiable, et ses changements d'état dans le temps, définis par des fonctions différentiables.

Les coordonnées et la vitesse des points d'un système mécanique sont différentiables par rapport au temps.

Les mouvements étudiés dans la théorie du choc ne sont pas différentiables.

En mécanique classique donc, le mouvement d'un système peut être décrit par des équations différentielles ordinaires tandis que d'autres procédés seront nécessaires en mécanique quantique, en théorie de la chaleur, en hydrodynamique, en théorie de l'élasticité, en optique, en acoustique et en théorie du choc.

Citons encore deux exemples de processus déterministes, finis et différentiables: la désintégration radio-active et la reproduction des bactéries dans un bouillon de culture en quantité suffisante. Dans les deux cas, l'espace des phases est unidimensionnel: l'état du processus est défini soit par la quantité restante de matière radio-active, soit par le nombre de bactéries. Dans les deux cas le processus est décrit par une équation différentielle ordinaire.

Remarquons que la forme de l'équation différentielle décrivant un processus ainsi que le fait même que tel ou tel processus est déterministe, fini et différentiable ne peuvent être établis qu'expérimentalement, donc avec un certain degré de précision. A l'avenir nous nous dispenserons de souligner à chaque fois cette circonstance et nous opérerons avec les processus réels comme s'ils coïncidaient avec nos modèles mathématiques idéalisés.

2. Flots. La formulation exacte des principes généraux exposés ci-dessus fait appel aux notions relativement abstraites *d'espace des phases et de flot*. Pour bien les assimiler voyons un exemple où la seule introduction de l'espace des phases permet de résoudre un exercice épineux.

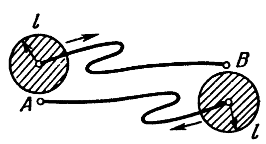

Fig. 1. Position de départ des véhicules sphériques

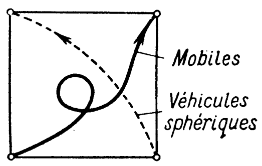

Fig. 2. Espace des phases des véhicules et des mobiles

Exercice 1 (N. Konstantinov). Les villes A et B (fig. 1) sont reliées par deux routes ne se coupant nulle part. On sait que deux mobiles empruntant chacun une de ces voies et liés entre eux par une ficelle d'une longueur inférieure à $2l$, peuvent se rendre de A en B sans rompre cette ficelle. On se demande si deux véhicules sphériques de rayon l, dont les centres se déplacent sur chacune de ces routes, l'un à la rencontre de l'autre, peuvent se croiser sans se heurter.

S o l u t i o n. Examinons le carré (fig. 2)

$$M = \{x_1, x_2 : 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}.$$

On peut représenter la position des deux mobiles (l'un se déplaçant sur la première route, l'autre sur la seconde) par un point du carré M : il suffit pour cela de désigner par x_i la fraction de distance AB parcourue sur la route i en partant de A.

Toutes les positions des deux mobiles sont représentées par des points du carré M. Ce carré est appelé *espace des phases* et ses points *points représentatifs*. Par conséquent, à chaque déplacement des mobiles correspond le déplacement d'un point représentatif dans l'espace des phases.

Les mobiles partent de la ville A que nous supposerons correspondre à l'angle inférieur gauche du carré ($x_1 = x_2 = 0$), quant à leur déplacement de A en B, il est représenté par la courbe qui mène à l'angle opposé.

De la même manière les véhicules sphériques partent de l'angle inférieur droit ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$), quant à leur mouvement il est représenté par la courbe conduisant à l'angle opposé du carré.

Or, dans un carré deux courbes quelconques joignant des sommets opposés se coupent. Par conséquent, quel que soit le mouvement des véhicules sphériques, il arrivera un instant où ils occuperont une position déjà occupée par le couple de mobiles. A cet instant la distance séparant les centres des véhicules sphériques sera inférieure à $2l$. De sorte qu'il leur est impossible de ne pas se heurter.

Dans cet exemple nous n'avons pas rencontré d'équations différentielles, mais notre raisonnement est proche de ce que nous allons étudier par la suite: il est souvent très utile d'assimiler les états d'un processus à un point d'un espace convenable.

Revenons à présent aux notions de processus déterministe, fini et différentiable.

Le *flot* est un modèle mathématique d'un processus déterministe. Le flot peut être décrit intuitivement de la manière suivante.

Soit M l'espace des phases d'un processus, $x \in M$ un état initial quelconque. Désignons par $g^t x$ l'état de ce processus à l'instant t avec un état initial x. Nous avons ainsi défini pour chaque t réel l'application

$$g^t : M \to M,$$

de l'espace des phases M sur lui-même. L'application g^t qui associe à chaque état $x \in M$ un nouvel état $g^t x \in M$ s'appelle *application pendant le temps t*. Par exemple, l'application g^0 qui laisse fixe chaque point de M est l'application identique.

Nous avons plus loin

$$g^{t+s} = g^t g^s,$$

étant donné que l'état $y = g^s x$ (fig. 3) de x au bout du temps s sera au bout d'un temps t le même que l'état $z = g^t y$ de x au bout du temps $t + s$, i.e. $g^{t+s}x = z$.

Fixons le point $x \in M$, i.e. l'état initial du processus. L'état du processus évoluant dans le temps, le point x décrira une certaine

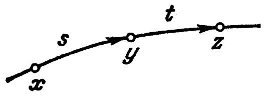

Fig. 3. Changement d'état du processus en fonction du temps

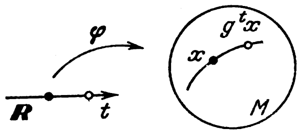

Fig. 4. Mouvement d'un point dans l'espace des phases M

orbite $\{g^t x,\ t \in \mathbf{R}\}$ dans l'espace des phases M. Les applications g^t constituent un *flot*; chaque point de l'espace se déplace sur son orbite.

Nous allons à présent donner des définitions mathématiques plus rigoureuses.

Soit un ensemble quelconque M.

D é f i n i t i o n. Une famille $\{g^t\}$ d'applications de M dans M, indexées par l'ensemble des réels ($t \in \mathbf{R}$), est appelée *groupe à un paramètre d'applications* de M si, quels que soient s et $t \in \mathbf{R}$

$$g^{t+s} = g^t g^s \tag{1}$$

et g^0 est l'application identique laissant fixe chaque point.

E x e r c i c e 2. Démontrer qu'un groupe à un paramètre d'applications est un groupe commutatif et que chaque application $g^t: M \to M$ est biunivoque.

D é f i n i t i o n. On appelle *flot* $(M, \{g^t\})$ le couple formé de l'ensemble M et d'un groupe à un paramètre $\{g^t\}$ d'applications de M. L'ensemble M est appelé *espace des phases* du flot.

Soit $x \in M$ un point quelconque de l'espace des phases. Considérons l'application

$$\varphi\colon\ \mathbf{R} \to M, \quad \varphi(t) = g^t x. \tag{2}$$

D é f i n i t i o n. On appelle *mouvement* du point x sous l'action du flot $(M, \{g^t\})$ l'application (2) de l'axe réel sur l'espace des phases (fig. 4).

D é f i n i t i o n. On appelle *orbite* du flot $(M, \{g^t\})$ l'image de l'application (2)

$$\varphi\colon\ \mathbf{R} \to M.$$

Par conséquent une orbite est un sous-ensemble de l'espace des phases (fig. 5).

E x e r c i c e 3. Montrer que par chaque point de l'espace des phases passe une orbite et une seule.

D é f i n i t i o n. On appelle *position d'équilibre* ou *point fixe* $x \in M$ du flot $(M, \{g^t\})$ tout point qui est en même temps orbite, i.e.

$$g^t x = x \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

La représentation graphique de l'application φ est liée aux notions *d'espace des phases élargi* et de *courbe intégrale*. Rappelons que le *produit direct* $A \times B$ de l'ensemble A par l'ensemble B est l'ensemble

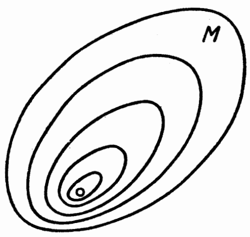

Fig. 5. Orbites

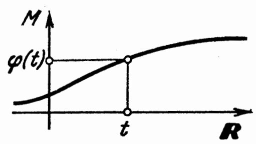

Fig. 6. Courbe intégrale dans l'espace des phases élargi

des couples ordonnés (a, b), $a \in A$, $b \in B$. Le *graphique* de l'application $f: A \to B$ est le sous-ensemble du produit direct $A \times B$, composé de tous les points $(a, f(a))$, $a \in A$.

D é f i n i t i o n. On appelle *espace des phases élargi* du flot $(M, \{g^t\})$ le produit direct $\mathbf{R} \times M$ de l'axe réel t par l'espace des phases M. On appelle *courbe intégrale* du flot $(M, \{g^t\})$ le graphique du mouvement (2) (fig. 6).

E x e r c i c e 4. Montrer que par tout point de l'espace des phases élargi passe une courbe intégrale et une seule.

E x e r c i c e 5. Montrer que la droite horizontale $\mathbf{R} \times x$, $x \in M$ est une courbe intégrale si, et seulement si, x est une position d'équilibre.

E x e r c i c e 6. Montrer qu'une translation de l'espace des phases élargi le long de l'axe des temps

$$h^s: (\mathbf{R} \times M) \to (\mathbf{R} \times M), \quad h^s(t, x) = (t + s, x)$$

envoie courbes intégrales sur courbes intégrales.

3. Difféomorphismes. Les définitions données plus haut formalisent la notion de processus déterministe. La formalisation des conditions de finitude et de différentiabilité implique que l'espace des phases doit être une *variété différentiable de dimension finie*, et le flot un *groupe à un paramètre de difféomorphismes* de cette variété.

Expliquons-nous. Comme exemples de variétés différentiables nous connaissons les espaces euclidiens, tous les ensembles ouverts de ces espaces, le cercle, la sphère, le tore. Nous en donnerons une définition générale dans le chapitre 5. Pour l'instant nous supposerons dans nos raisonnements que nous avons affaire à un domaine ouvert d'un espace euclidien.

On appelle *fonction différentiable* $f: U \to \mathbf{R}$ définie sur le domaine U de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, muni des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, la fonction r fois continûment différentiable $f(x_1, \ldots, x_n)$, où $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Dans la plupart des cas la valeur exacte de r sera de peu d'intérêt, aussi omettrons-nous de l'indiquer; au besoin nous dirons que la fonction est r fois différentiable ou encore qu'elle appartient à la classe C^r.

On appelle *application différentiable* $f: U \to V$ du domaine U de l'ensemble euclidien $\mathbf{R}^n$ muni des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans le domaine V de l'ensemble euclidien $\mathbf{R}^m$ muni des coordonnées $y_1, \ldots, y_m$ l'application définie par les fonctions différentiables $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$. Ce qui signifie que si $y_i: V \to \mathbf{R}$ sont des coordonnées sur V, alors $y_i \circ f: U \to \mathbf{R}$ sont des fonctions différentiables sur U $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

On appelle *difféomorphisme* $f: U \to V$ une application bijective telle que f et $f^{-1}: V \to U$ soient des applications différentiables.

E x e r c i c e 1. Des fonctions suivantes indiquer celles qui définissent un difféomorphisme $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ d'une droite sur une droite:

$$f(x) = 2x,\ x^2,\ x^3,\ e^x,\ e^x + x.$$

E x e r c i c e 2. Montrer que si $f: U \to V$ est un difféomorphisme, les espaces euclidiens contenant les domaines U et V ont même dimension.

N o t a. Se servir du théorème des fonctions implicites.

D é f i n i t i o n. On appelle *groupe à un paramètre* $\{g^t\}$ *de difféomorphismes* d'une variété *) M une application g

$$g: \mathbf{R} \times M \to M, \quad g(t, x) = g^t x, \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in M$$

telle que

1) g soit une application différentiable;

2) pour tout $t \in \mathbf{R}$ l'application $g^t: M \to M$ soit un difféomorphisme;

3) la famille $\{g^t,\ t \in \mathbf{R}\}$ soit un groupe à un paramètre de transformations de M.

E x e m p l e 1. $M = \mathbf{R}$, $g^t x = x + vt$ $(v \in \mathbf{R})$.

R e m a r q u e. La propriété 2 découle des propriétés 1 et 3. (Dire pourquoi.)

4. Champs de vecteurs. Soit $(M, \{g^t\})$ un flot défini par un groupe à un paramètre de difféomorphismes d'une variété M sur un espace euclidien.

---

*) On peut supposer qu'il s'agit du domaine M d'un espace euclidien.

D é f i n i t i o n. On appelle *vitesse* $\boldsymbol{v}(x)$ du flot g^t au point $x \in M$ (fig. 7) le vecteur caractérisant la vitesse du point représentatif

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^t x = \boldsymbol{v}(x)\,; \tag{3}$$

nous désignerons parfois par $\dot{x}$ le premier membre de la relation (3).

Remarquons qu'un mouvement est une application différentiable dans le domaine d'un espace euclidien, de sorte que la dérivée est déterminée.

E x e r c i c e 1. Montrer que

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=\tau} g^t x = \boldsymbol{v}(g^\tau x),$$

i.e. le vecteur vitesse du mouvement d'un point à chaque instant est égal au vecteur de la vitesse du flot à l'endroit de l'espace des phases où se trouve le point mobile à l'instant considéré.

N o t a. Voir (1). On trouvera la solution dans le § 3.2.

Si $x_1, \ldots, x_n$ représentent des coordonnées sur notre espace euclidien, $x_i: M \to \mathbf{R}$, le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}(x)$ est alors défini par n

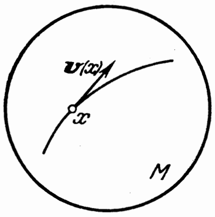

Fig. 7. Vecteur vitesse

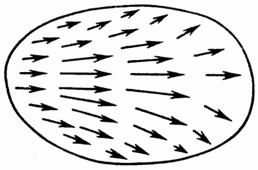

Fig. 8. Champ de vecteurs

fonctions $v_i: M \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ appelées composantes du vecteur vitesse

$$v_i(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} x_i(g^t x).$$

E x e r c i c e 2. Montrer que v_i sont des fonctions de la classe C^{r-1} si le groupe à un paramètre $g: \mathbf{R} \times M \to M$ est de la classe C^r.

Soit M un domaine d'un espace euclidien muni des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ $(x_i: M \to \mathbf{R})$.

D é f i n i t i o n. Le *champ de vecteurs* v sur M associe à chaque point x du domaine M un vecteur $\boldsymbol{v}(x)$ admettant ce point pour origine. Dans un système de coordonnées x_i le champ est défini par n fonctions différentiables $v_i: M \to \mathbf{R}$.

Par conséquent, les vecteurs vitesse engendrent sur l'espace des phases M un champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ (fig. 8).

Exercice 3. Montrer que si x est un point fixe du flot, alors $v(x) = 0$.

On appelle *point singulier* *) du champ de vecteurs tout point en lequel s'annule un vecteur. Donc les positions d'équilibre d'un flot sont des points singuliers pour le champ de sa vitesse. La réciproque est également vraie, mais sa démonstration n'est pas si facile.

5. Le problème fondamental de la théorie des équations différentielles ordinaires. Le problème fondamental de la théorie des équations différentielles ordinaires consiste à étudier les groupes à un paramètre $\{g^t\}$ des difféomorphismes d'une variété M, les champs de vecteurs définis sur M ainsi que les liens existant entre eux.

Plus haut nous avons vu qu'un groupe $\{g^t\}$ définissait un champ de vecteurs (le champ de vitesses v) d'après la formule (3).

Il s'avère qu'inversement un champ de vecteurs v définit univoquement un flot (sous certaines conditions qui seront précisées dans la suite).

On peut donc par abus de langage dire que le champ de vecteurs de la vitesse du flot est une *loi locale d'évolution* d'un processus, quant à la théorie des équations différentielles ordinaires, elle doit être en mesure, en faisant appel à cette loi, de restaurer le passé et de prédire le futur.

6. Exemples de champs de vecteurs.

Exemple 1. On sait expérimentalement que *la vitesse de désintégration radio-active est proportionnelle à la quantité de matière x.* L'espace des phases est ici une demi-droite (fig. 9)

$$M = \{x : x > 0\}.$$

La loi de la désintégration radio-active s'écrit

$$\dot{x} = -kx, \quad v(x) = -kx, \quad k > 0, \tag{4}$$

i.e. le champ de vecteurs v sur la demi-droite est orienté vers l'origine et le vecteur vitesse du flot est proportionnel à x.

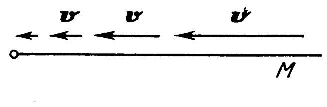

Fig. 9. Espace des phases de la désintégration radio-active

Exemple 2. On sait expérimentalement que *dans un bouillon de culture en quantité suffisante la vitesse de reproduction des bactéries est proportionnelle à leur nombre x.*

*) Il est à remarquer qu'en un point singulier les composantes du champ ne possèdent pas de singularités: elles sont continûment différentiables. L'appellation de « point singulier » provient de ce qu'au voisinage d'un tel point la direction des vecteurs varie en général d'une façon discontinue.