CHAPITRE 1

COURS COMPLET DE MATHEMATIQUES ET DE CALCUL. APPLICATIONS CLES

Introduction

Les **QCM et Exercices courts de CALCUL** aux concours des **catégories B et C** sont redoutés par la grande majorité des candidats. Ces épreuves puisent en effet leurs sources dans les programmes de mathématiques des classes de Collège et plus particulièrement de Troisième… inutile donc d'ignorer les appréhensions et blocages que certains d'entre vous peuvent rencontrer devant un énoncé qui convoque des systèmes d'équations, des conversions métriques ou encore d'obscures formules d'aire et de volume.

Et pourtant, **cette épreuve est fondamentale**. En effet, tout bon fonctionnaire se doit impérativement de maîtriser les notions élémentaires de calcul.

Nous vous conseillons donc de préparer cette épreuve de façon très méticuleuse. Ne laissez aucune notion, aucun détail vous échapper… vous pourriez être amenés à le regretter amèrement. Car si l'épreuve de Calcul est parfois difficile, elle représente surtout pour vous une occasion unique de vous démarquer et d'engranger de précieux points d'avance afin de faire la différence par rapport à la masse de candidats. Sachez qu'il y a une dispersion forte des notes obtenues à cette épreuve : beaucoup de notes médiocres, peu de notes moyennes et encore moins d'excellentes notes. Vous comprendrez donc qu'il n'y a plus de temps à perdre !

Attention : vous n'avez jamais le droit à la calculatrice.

De nombreux candidats se disent souvent littéralement « perdus » sans calculatrice. Point d'inquiétude, si vous apprenez avec justesse et persévérance le cours qui suit, nul doute que vous aurez vite fait de vous passer de cet objet maléfique.

I. ARITHMÉTIQUE

Les épreuves des concours administratifs font largement appel à des notions d'arithmétique. Il s'agit en effet à chaque fois de juger votre capacité à manipuler les chiffres et les nombres avec rapidité et dextérité.

Une épreuve de QCM ou d'Exercices contient généralement un grand nombre de questions qui sont purement et simplement des questions de calcul mental

Ces questions de calcul mental permettent d'évaluer votre capacité à raisonner mais aussi votre aptitude à poser des règles de trois, des additions, soustractions, multiplications et autres divisions **et surtout** à les calculer très rapidement.

L'objet de cette partie consacrée à l'arithmétique est de vous donner les techniques qui vous permettront de résoudre rapidement des exercices et problèmes utilisant des notions fortes de calcul mental. Nous vous proposons ici de rentrer au cœur même des nombres et d'en entrevoir l'extrême puissance et richesse.

Les notions qui suivent sont à maîtriser parfaitement.

1. Vocabulaire

Ensemble des nombres entiers (ou entiers naturels)

Il s'agit de l'ensemble des nombres entiers positifs, 0 inclus : 0, 1, 2, 3, 4,… 85, 86,…, 1000, 1001,… 200000, … il y en a une infinité ! (Souvenez-vous lorsque vous avez appris à compter).

Ensemble des nombres entiers relatifs

L'ensemble des nombre entiers relatifs contient l'ensemble des nombres entiers naturels PLUS l'ensemble des nombres entiers naturels précédés du signe "–" (ce sont des nombres entiers négatifs), tels que : – 11, – 12, – 1000…

Ensemble des nombres décimaux

Il s'agit de l'ensemble des nombres qui sont des divisions de nombres entiers par des puissances (positives) de 10. Ainsi 2,76 est un nombre décimal car il s'écrit sous la forme : $2{,}76 = 276/100 = 276/10^2$. De même 0,01023 est un nombre décimal car il s'écrit sous la forme $0{,}01023 = 1023/100000 = 1023/10^5$

Vous l'aurez compris, les nombres entiers sont aussi des nombres décimaux (il n'y a alors que des 0 après la virgule).

Ensemble des nombres rationnels

Il s'agit de l'ensemble des nombres que l'on peut écrire sous forme fractionnaire $\frac{p}{q}$ avec p et q des entiers relatifs.

Ensemble des nombres irrationnels

Il s'agit de l'ensemble des nombres que l'on ne peut écrire sous forme fractionnaire. Ainsi, $\sqrt{2}$ et π sont considérés comme des nombres irrationnels puisqu'ils ne peuvent s'écrire sous forme de fractions.

Ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels est l'ensemble le plus large sur lequel on peut vous demander de travailler. Cet ensemble contient l'ensemble des nombres entiers naturels et relatifs, l'ensemble des nombres décimaux, des fractions et des irrationnels.

Facteurs, multiples et diviseurs

La relation simple A X B = C, avec A, B et C des nombres entiers quelconques nous permet d'introduire le vocabulaire suivant :

A x B = C	**5 X 3 = 15**
A et B sont des facteurs de C	5 et 3 sont des facteurs de 15
A et B sont des diviseurs de C	5 et 3 sont des diviseurs de 15
C est divisible par A et B	15 est divisible par 5 et 3
C est multiple de A et de B	15 est multiple de 5 et de 3

PGCD

C'est le Plus Grand Commun Diviseur

Exemples :

- 5 est le PGCD de 10 et de 15. En effet, 10 = **5** X 2 et 15 = **5** X 3
- 11 est le PGCD de 11, 143 et de 154. En effet, 11 = **11** X 1, 143 = **11** X 13 et 154 = **11** X 7 X 2

PPCM

C'est le Plus Petit Commun Multiple

Exemples :

- 2 est le PPCM de 4, 6 et 12. En effet 4 = **2** X 2, 6 = **2** X 3, 12 = **2** X 2 X 3
- 3 est le PPCM de 36 et 33. En effet 36 = **3** X 3 X 4, 33 = **3** X 11

Division euclidienne

si a et b sont *deux entiers relatifs*, b différent de 0, il existe des entiers q et r déterminés de manière unique par les conditions suivantes :

$$\mathbf{a = b \times q + r} \text{ avec } 0 \le r \le b-1$$

q s'appelle le quotient de la division de a par b et r est le reste de cette division. Si le reste est nul, cela signifie qu'il existe un entier q tel que a = b x q ; on dit alors que b divise a, ou que a est un multiple de b .

Exemple :

Je veux diviser 33 par 8

Une simple division que je pose à la main donne :

33 par 8 : 8 divise 33 quatre fois, 4 X 8 = 32, et il me reste (33 – 32) = 1

Ainsi dans notre exemple : a = 33, b = 8, q = 4 et r = 1.

Je vérifie bien que r est inférieur ou égal à b – 1, ce qui est le cas, et je peux alors écrire : 33 = 8 X 4 + 1

2. Les critères de divisibilité

Nous vous conseillons vivement de connaître ces critères de divisibilité sur le bout des doigts car ils vous permettront de gagner un temps précieux pour bon nombre de vos calculs.

N'oubliez jamais que les épreuves de QCM des concours administratifs font largement appel à votre maîtrise parfaite du **calcul mental** : vous serez souvent amenés à faire des calculs rapides de tête (additions, multiplications, puissances) ou à simplifier des fractions. Or pour simplifier rapidement des fractions, il est indispensable de maîtriser ces critères de divisibilité.

1. Critère de divisibilité par 2

Un nombre N est divisible par 2 si et seulement si il se termine par 0, 2, 4, 6 ou bien 8… autrement dit si et seulement si il est pair.

Exemple :

- les nombres 28, 1004, 82632 et 1736456374 sont tous divisibles par 2

2. Critère de divisibilité par 3

Un nombre N est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemples :

- le nombre 243 est divisible par 3 car 2+4+3=9 et 9 est bien sûr divisible par 3. De même 738 est divisible par car 7+3+8=18 et 18 est divisible par 3.
- le nombre 43652364 est divisible par 3 car 4+3+6+5+2+3+6+4=33 et 33 est divisible par 3 (en effet pour 33, on a 3+3=6 et 6 est divisible par 3).

3. Critère de divisibilité par 4

Un nombre N est divisible par 4 si et seulement si il se termine par 2 chiffres AB constituant un nombre divisible par 4, c'est-à-dire si et seulement si le dernier chiffre B est égal à 0, 4 ou 8 - pour un avant-dernier chiffre A pair - ou bien égal 2 ou 6 pour un avant-dernier chiffre B impair.

Exemples :

- Le nombre 5**48** est divisible par 4 car ses deux derniers chiffres 4 et 8 forment le nombre 48 qui est divisible par 4 (en effet, nous sommes dans le cas où le dernier chiffre est 8 avec un avant-dernier chiffre pair : 4).
- Le nombre 132476 est divisible par 4 car ses deux derniers chiffres 7 et 6 forment le nombre 76 qui est divisible par 4 (en effet, nous sommes dans le cas où le dernier chiffre est 6 avec un avant-dernier chiffre impair : 7).

4. Critère de divisibilité par 5

Un nombre N est divisible par 5 si et seulement si il finit par 0 ou 5.

Exemples :

- Le nombre 1550 finit par 0… il est donc divisible par 5
- Le nombre 14362635 finit par 5… il est donc aussi divisible par 5
- Le nombre 505555551 finit par 1… il n'est donc pas divisible par 5

5. Critère de divisibilité par 6

Un nombre N est divisible par 6 si et seulement si il est divisible par 2 *et* par 3, nombres pour lesquels vous connaissez maintenant les critères.

Exemples :

- Le nombre 25458 est divisible par 6 car : il est divisible par 2 (en effet, 25458 finit par 8) *et* il est divisible par 3 (en effet, 2+5+4+5+8=24 et 24 est divisible par 3 (2+4=6))
- Le nombre 466 n'est pas divisible par 6 car il n'est pas divisible par 3 (en effet la somme de ces chiffres donne 16 et 1+6=7 n'est pas divisible par 3)

- Le nombre 1117722 est divisible par 6 car : il est divisible par 2 (en effet, 1117722 finit par 2) *et* il est divisible par 3 (en effet, 1+1+1+7+7+2+2=21 et 21 est divisible par 3 (2+1=3))

6. Critère de divisibilité par 9

Un nombre N est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses nombres est divisible par 9

Exemples :

- Le nombre 378 est divisible par 9 car 3+7+8=18 et 18 est divisible par 9 (1+8=9)
- Le nombre 203985 est divisible par 9 car 2+0+3+9+8+5=27 et 27 est divisible par 9 (2+7=9)

7. Critère de divisibilité par 10

Un nombre N est divisible par 10 si et seulement si il se termine par 0

Exemples :

- Le nombre 289830 est divisible par 10 car il finit par 0
- Le nombre 8101 n'est pas divisible par 10 car il ne finit pas par 0

8. Critère de divisibilité par 11

Critère général : un nombre N est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et celle de ses chiffres de rang pair est un multiple de 11.

Critère pour les nombres à 3 chiffres : pour vérifier que votre nombre de 3 chiffres est divisible par 11, il suffit de vérifier que la somme du premier et du dernier chiffre de votre nombre est égale au second chiffre de votre nombre. Ainsi, 176 est divisible par 11 car 1+6=7 et 781 est aussi divisible par 11 car 7+1=8

Exemples :

- Nombres à 2 chiffres : les nombres 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 sont tous divisibles par 11
- Appliquons dans cet exemple le critère général pour le nombre 715462. D'après le critère, il suffit de faire la différence entre la somme des chiffres de rang impair (7+5+6=18) et la somme des chiffres de rang pair (1+4+2=7), c'est à dire 18-7, qui est égal 11. Or comme 11 est un multiple de 11, le nombre 715462 l'est aussi.

- Autre exemple : le nombre 12727 est divisible par 11 car (1+7+7) – (2+2) = 15 – 4 = 11… et 11 est bien sûr un multiple de 11.

3. Les nombres premiers

1. Définition d'un nombre premier

Un nombre premier est un nombre qui n'est divisible *que* par lui-même *et* par 1.

- 1 n'est pas un nombre premier
- Apprenez par cœur les 10 premiers nombres premiers : **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.**
- Remarque : 2 exclus, tous les nombres premiers sont impairs

2. Décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers

Tout entier naturel a > 1 est décomposable *d'une manière unique* en un *produit de nombres premiers distincts*.

Exemples:

- $45 = 5 \times 3 \times 3 = 5 \times 3^2$ avec 3 et 5 des nombres premiers.
- $187 = 11 \times 17$ avec 11 et 17 des nombres premiers.
- $1827 = 9 \times 7 \times 29 = 3^2 \times 7 \times 29$ avec 3, 7 et 29 des nombres premiers.

4. Pair / Impair

1. Définition d'un nombre pair

Un nombre pair est un nombre entier positif, multiple de 2, dont le dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8. Un nombre pair N s'écrit sous la forme N = 2p, avec p un entier naturel.

Exemples : 2, 4, 16 et 568 sont des nombres pairs. Et ils peuvent s'écrire sous la forme 2 = **2** X 1, 4 = **2** X 2, 16 = **2** X 8 et 568 = **2** X 259.

2. Définition : nombre impair

Un nombre impair est un nombre entier positif dont le dernier chiffre est 1, 3, 5, 7 ou 9. Un nombre impair M s'écrit sous la forme M = 2p + 1, avec p un entier naturel.

Exemples : 5, 17, 251 et 567 sont des nombres impairs. Et ils peuvent s'écrire sous la forme 5 = **2** X 2 + **1**, 17 = **2** X 8 + **1**, 251 = **2** X 125 + **1**, 567 = **2** X 283 + **1**

Remarque : Un nombre impair est toujours consécutif à un nombre pair et un nombre pair est toujours consécutif à un nombre impair.

3. Opérations fondamentales

Nous vous conseillons de maîtriser ces opérations de base sur les nombres pairs et impairs.

Pair	+	Pair	=	Pair
Pair	+	Impair	=	Impair
Impair	+	Impair	=	Pair

Pair	x	Pair	=	Pair
Pair	x	Impair	=	Pair
Impair	x	Impair	=	Impair

$(\text{Pair})^n$	=	Pair	quel que soit la valeur de n, un entier naturel
$(\text{Impair})^n$	=	Impair	quel que soit la valeur de n, un entier naturel

5. Tables de 1à 15, de carrés et de cubes

Que les choses soient claires dès maintenant : nous vous recommandons de maîtriser parfaitement (et nous disons bien *parfaitement*) vos tables de multiplication de 1 à 15, ainsi que les tables de carrés et de cubes.

Outre le fait qu'il est on ne peut plus indispensable de maîtriser ses tables pour gagner en rapidité et en précision dans les calculs et ainsi pouvoir espérer terminer les épreuves de QCM, il convient d'apprendre à se passer dès maintenant de votre calculatrice et de faire comme si vous n'en aviez jamais eu (vous n'avez jamais eu de calculatrice n'est-ce pas ?). Si vous apprenez vos tables de multiplications, vos carrés et vos cubes et surtout, si vous posez correctement vos calculs (multiplications, divisions etc.) alors nul doute que vous irez beaucoup plus vite que les autres candidats et que vous vous ouvrirez alors les portes de l'admissibilité.