

Table des matières

Introduction	vii
1 Généralités	1
1.1 Définitions et terminologie	1
1.2 Solution des équations différentielles	4
1.3 Remarques sur les équations du premier ordre	8
1.4 Conclusion	12
2 Equations différentielles du 1^{er} ordre	13
2.1 Equations à variables séparables	13
2.2 Equations différentielles homogènes	19
2.3 Equations différentielles exactes	26
2.3.1 Facteur intégrant	36
2.4 Equations linéaires	41
2.5 Equations de Bernoulli	49
2.6 Equations à coefficients linéaires	54
2.7 Equations d'ordre 2 réductibles au 1 ^{er} ordre	59
2.8 Conclusion	65
3 Applications des équations du 1^{er} ordre	71
3.1 Croissance et décroissance exponentielle	71
3.1.1 Modèle d'évolution d'une population	72
3.2 Problèmes de mélange	78
3.3 Problèmes en mécanique	83
3.4 Trajectoires orthogonales	90
3.5 Circuits électriques	95
3.6 Conclusion	101
4 Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur	105
4.1 Problèmes linéaires avec conditions initiales	105
4.2 Equations différentielles linéaires homogènes	109

4.2.1	Opérateurs différentiels	109
4.2.2	Principe de superposition	114
4.2.3	Indépendance linéaire et wronskien	117
4.2.4	Système fondamental de solutions	122
4.3	Equations homogènes à coefficients constants	125
4.4	Opérateur annulateur	139
4.5	Equations différentielles non homogènes	142
4.6	Méthode des coefficients indéterminés	145
4.6.1	Approche par superposition	152
4.6.2	Approche de l'annulateur	154
4.7	Méthode de variation des paramètres	158
4.8	Conclusion	165
5	Applications des équations différentielles du second ordre	169
5.1	Généralités	169
5.2	Oscillateur libre non amorti	170
5.2.1	Description du système	170
5.2.2	Equation harmonique simple	171
5.2.3	Solution générale de l'équation harmonique	173
5.2.4	Conservation de l'énergie	175
5.3	Oscillateur libre amorti	179
5.3.1	Description du système	179
5.3.2	Equation harmonique amortie	180
5.4	Oscillateur forcé	191
5.4.1	Oscillations forcées amorties	191
5.4.2	Equation différentielle du mouvement	192
5.4.3	Oscillations forcées non amorties sous excitation périodique	195
5.5	Circuits électriques	200
5.5.1	Equation différentielle pour un circuit RLC	201
5.5.2	Analogie avec l'étude des oscillations mécaniques	202
5.6	Conclusion	208
6	Equations linéaires à coefficients variables	211
6.1	Equations de Cauchy-Euler	212
6.2	Méthode de réduction de l'ordre	215
6.3	Introduction aux séries solutions	223
6.3.1	Points ordinaires et points singuliers	224
6.3.2	Rappels sur les séries entières	225
6.3.3	Existence des séries solutions au voisinage des points ordinaires	227

6.3.4	Suite définie par une relation de récurrence	229
6.4	Solutions autour de points ordinaires	233
6.5	Méthode de Frobenius	248
6.5.1	Points singuliers réguliers et irréguliers	248
6.5.2	Méthode de Frobenius	250
6.6	Equation indicelle avec deux racines égales	261
6.7	Cas où la différence entre les racines est un entier	266
6.8	Conclusion	272
7	La transformée de Laplace	277
7.1	Définition et existence	277
7.2	Propriétés de la transformée de Laplace	284
7.3	Transformée inverse de Laplace	289
7.4	Transformée des fonctions discontinues	296
7.5	Résolution des problèmes à valeurs initiales	302
7.6	Produit de convolution	308
7.7	Conclusion	316
8	Systèmes d'équations différentielles	321
8.1	Définition et réduction au premier ordre	321
8.2	Rappel sur les matrices	327
8.3	Valeurs propres et vecteurs propres	334
8.4	Système différentiel du premier ordre	342
8.4.1	Théorie basique	342
8.4.2	Systèmes linéaires homogènes du premier ordre	344
8.5	Systèmes homogènes à coefficients constants	346
8.5.1	Cas 1 : n valeurs propres réelles distinctes	347
8.5.2	Cas 2 : valeurs propres complexes simples	349
8.5.3	Cas 3 : valeurs propres multiples	352
8.6	Systèmes linéaires non homogènes	361
8.7	Utilisation de la transformée de Laplace	366
8.8	Conclusion	369
9	Introduction aux méthodes numériques	373
9.1	Méthode d'Euler	374
9.1.1	Problème traité	374
9.1.2	Description de la méthode	374
9.2	Méthode de Taylor	381
9.3	Méthodes de Runge-Kutta	389

10 Appendice : Résolution des équations différentielles avec le logiciel Mathematica	395
10.1 Généralités	395
10.1.1 Instructions	395
10.1.2 Opérations arithmétiques simples	396
10.1.3 Affectation	396
10.1.4 Règles et substitutions	397
10.1.5 Fonctions et objets prédéfinis	397
10.1.6 Menu Help	398
10.1.7 Fonctions	398
10.2 Séries entières	398
10.3 Représentations graphiques	400
10.4 Dérivation	406
10.5 Intégration	407
10.6 Résolution des équations différentielles	409
10.6.1 La commande DSolve :	410
10.6.2 La commande NDSolve	423
10.7 Transformée de Laplace	426
10.8 Solutions séries	428
10.9 Conclusion	430
Bibliographie	431
Index	433