

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>1</b>
1.1 Définitions et terminologie . . . . .	1
1.2 Solution des équations différentielles . . . . .	4
1.3 Remarques sur les équations du premier ordre . . . . .	8
1.4 Conclusion . . . . .	12
<b>2 Equations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre</b>	<b>13</b>
2.1 Equations à variables séparables . . . . .	13
2.2 Equations différentielles homogènes . . . . .	19
2.3 Equations différentielles exactes . . . . .	26
2.3.1 Facteur intégrant . . . . .	36
2.4 Equations linéaires . . . . .	41
2.5 Equations de Bernoulli . . . . .	49
2.6 Equations à coefficients linéaires . . . . .	54
2.7 Equations d'ordre 2 réductibles au 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	59
2.8 Conclusion . . . . .	65
<b>3 Applications des équations du 1<sup>er</sup> ordre</b>	<b>71</b>
3.1 Croissance et décroissance exponentielle . . . . .	71
3.1.1 Modèle d'évolution d'une population . . . . .	72
3.2 Problèmes de mélange . . . . .	78
3.3 Problèmes en mécanique . . . . .	83
3.4 Trajectoires orthogonales . . . . .	90
3.5 Circuits électriques . . . . .	95
3.6 Conclusion . . . . .	101
<b>4 Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur</b>	<b>105</b>
4.1 Problèmes linéaires avec conditions initiales . . . . .	105
4.2 Equations différentielles linéaires homogènes . . . . .	109

4.2.1	Opérateurs différentiels . . . . .	109
4.2.2	Principe de superposition . . . . .	114
4.2.3	Indépendance linéaire et wronskien . . . . .	117
4.2.4	Système fondamental de solutions . . . . .	122
4.3	Equations homogènes à coefficients constants . . . . .	125
4.4	Opérateur annulateur . . . . .	139
4.5	Equations différentielles non homogènes . . . . .	142
4.6	Méthode des coefficients indéterminés . . . . .	145
4.6.1	Approche par superposition . . . . .	152
4.6.2	Approche de l'annulateur . . . . .	154
4.7	Méthode de variation des paramètres . . . . .	158
4.8	Conclusion . . . . .	165
<b>5</b>	<b>Applications des équations différentielles du second ordre</b>	<b>169</b>
5.1	Généralités . . . . .	169
5.2	Oscillateur libre non amorti . . . . .	170
5.2.1	Description du système . . . . .	170
5.2.2	Equation harmonique simple . . . . .	171
5.2.3	Solution générale de l'équation harmonique . . . . .	173
5.2.4	Conservation de l'énergie . . . . .	175
5.3	Oscillateur libre amorti . . . . .	179
5.3.1	Description du système . . . . .	179
5.3.2	Equation harmonique amortie . . . . .	180
5.4	Oscillateur forcé . . . . .	191
5.4.1	Oscillations forcées amorties . . . . .	191
5.4.2	Equation différentielle du mouvement . . . . .	192
5.4.3	Oscillations forcées non amorties sous excitation périodique . . . . .	195
5.5	Circuits électriques . . . . .	200
5.5.1	Equation différentielle pour un circuit RLC . . . . .	201
5.5.2	Analogie avec l'étude des oscillations mécaniques . . . . .	202
5.6	Conclusion . . . . .	208
<b>6</b>	<b>Equations linéaires à coefficients variables</b>	<b>211</b>
6.1	Equations de Cauchy-Euler . . . . .	212
6.2	Méthode de réduction de l'ordre . . . . .	215
6.3	Introduction aux séries solutions . . . . .	223
6.3.1	Points ordinaires et points singuliers . . . . .	224
6.3.2	Rappels sur les séries entières . . . . .	225
6.3.3	Existence des séries solutions au voisinage des points ordinaires . . . . .	227

6.3.4	Suite définie par une relation de récurrence . . . . .	229
6.4	Solutions autour de points ordinaires . . . . .	233
6.5	Méthode de Frobenius . . . . .	248
6.5.1	Points singuliers réguliers et irréguliers . . . . .	248
6.5.2	Méthode de Frobenius . . . . .	250
6.6	Equation indicelle avec deux racines égales . . . . .	261
6.7	Cas où la différence entre les racines est un entier . . . . .	266
6.8	Conclusion . . . . .	272
<b>7</b>	<b>La transformée de Laplace</b>	<b>277</b>
7.1	Définition et existence . . . . .	277
7.2	Propriétés de la transformée de Laplace . . . . .	284
7.3	Transformée inverse de Laplace . . . . .	289
7.4	Transformée des fonctions discontinues . . . . .	296
7.5	Résolution des problèmes à valeurs initiales . . . . .	302
7.6	Produit de convolution . . . . .	308
7.7	Conclusion . . . . .	316
<b>8</b>	<b>Systèmes d'équations différentielles</b>	<b>321</b>
8.1	Définition et réduction au premier ordre . . . . .	321
8.2	Rappel sur les matrices . . . . .	327
8.3	Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	334
8.4	Système différentiel du premier ordre . . . . .	342
8.4.1	Théorie basique . . . . .	342
8.4.2	Systèmes linéaires homogènes du premier ordre . . . . .	344
8.5	Systèmes homogènes à coefficients constants . . . . .	346
8.5.1	Cas 1 : n valeurs propres réelles distinctes . . . . .	347
8.5.2	Cas 2 : valeurs propres complexes simples . . . . .	349
8.5.3	Cas 3 : valeurs propres multiples . . . . .	352
8.6	Systèmes linéaires non homogènes . . . . .	361
8.7	Utilisation de la transformée de Laplace . . . . .	366
8.8	Conclusion . . . . .	369
<b>9</b>	<b>Introduction aux méthodes numériques</b>	<b>373</b>
9.1	Méthode d'Euler . . . . .	374
9.1.1	Problème traité . . . . .	374
9.1.2	Description de la méthode . . . . .	374
9.2	Méthode de Taylor . . . . .	381
9.3	Méthodes de Runge-Kutta . . . . .	389

<b>10 Appendice : Résolution des équations différentielles avec le logiciel Mathematica</b>	<b>395</b>
10.1 Généralités . . . . .	395
10.1.1 Instructions . . . . .	395
10.1.2 Opérations arithmétiques simples . . . . .	396
10.1.3 Affectation . . . . .	396
10.1.4 Règles et substitutions . . . . .	397
10.1.5 Fonctions et objets prédéfinis . . . . .	397
10.1.6 Menu Help . . . . .	398
10.1.7 Fonctions . . . . .	398
10.2 Séries entières . . . . .	398
10.3 Représentations graphiques . . . . .	400
10.4 Dérivation . . . . .	406
10.5 Intégration . . . . .	407
10.6 Résolution des équations différentielles . . . . .	409
10.6.1 La commande DSolve : . . . . .	410
10.6.2 La commande NDSolve . . . . .	423
10.7 Transformée de Laplace . . . . .	426
10.8 Solutions séries . . . . .	428
10.9 Conclusion . . . . .	430
Bibliographie . . . . .	431
Index . . . . .	433