Introduction

Le présent ouvrage présente un cours d'introduction aux équations différentielles ordinaires et à leurs applications. Il s'adresse aux élèves des écoles d'ingénieurs mais aussi aux étudiants en mathématiques et en physique dans leurs deuxième et troisième années d'études. Nous espérons qu'il leur sera une aide précieuse dans leur effort de compréhension de ce sujet mathématique.

Nous voulons par cet ouvrage atteindre deux objectifs. Premièrement, introduire les étudiants au monde des équations différentielles ordinaires et leurs applications liées aux sciences appliquées, à la physique, à la mécanique et à l'économie. Deuxièmement, apprendre à l'étudiant la rigueur et à former sa propre logique tout en l'accompagnant dans sa démarche d'acquisition à travers de nombreux problèmes résolus ainsi que d'exercices d'application avec indications.

L'ouvrage se constitue de 10 chapitres dont un appendice. Nous avons privilégié une approche approfondie mais simple et concise dans le traitement des sujets en mettant en œuvre beaucoup d'exemples résolus avec les bases théoriques nécessaires pour la résolution sans trop de détails mathématiques aux dépens de la compréhension des sujets traités.

Le premier chapitre est une introduction générale aux équations différentielles.

Le Chapitre 2 est consacré à la résolution des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Nous présentons en particulier les types d'équations dont on peut donner une formule explicite de la solution comme les équations différentielles à variables séparables, les équations exactes, les équations homogènes, etc.

Le Chapitre 3 présente les différents domaines d'application des équations différentielles du premier ordre modélisant des problèmes liés aux sciences physiques, chimiques et biologiques.

Dans le Chapitre 4, nous étudions les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur ou égal à 2. Nous traitons particulièrement les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et nous présentons la méthode de variation des paramètres et la méthode à coefficients indéterminés qui permettent de résoudre explicitement ce type d'équations.

Le Chapitre 5 est consacré à un certain nombre d'applications des équations différentielles du second ordre qui portent essentiellement sur des oscillateurs mécaniques et électriques.

Les équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux sont étudiées dans le Chapitre 6. Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de points ordinaires et points singuliers ainsi que les séries entières et la méthode de Frobenius. Le but de chapitre est de chercher une série solution d'une équation différentielle à coefficients polynomiaux.

Le Chapitre 7 aborde l'outil mathématique appelé transformée de Laplace pour la résolution des problèmes à conditions initiales.

Dans le Chapitre 8, on passe à l'étude détaillée des systèmes d'équations différentielles qu'on peut rencontrer dans de nombreuses applications physiques.

Dans le Chapitre 9, nous abordons brièvement la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre à condition initiale. Nous présentons pour cela, la méthode d'Euler, la méthode de Taylor et la méthode de Runge-Kutta.

Finalement, ce livre offre dans le dernier chapitre un appendice (de 37 pages environ) sur l'utilisation du logiciel Mathematica pour la résolution des équations différentielles (avec beaucoup d'exemples).

Basem S. Attili et Rima Cheaytou

A ma femme, mes enfants, mes étudiants et à tous ceux qui ont contribué à ce travail.

Basem S. Attili

A mon mari, mes enfants et mes parents.

Rima Cheaytou

Chapitre 1

Généralités

Notre compréhension de beaucoup de problèmes physiques, chimiques, biologiques, économiques ou de problèmes liés aux sciences de l'ingénieur est souvent basée sur une modélisation mathématique de ces problèmes afin de les représenter et ainsi les étudier. Dans ce type de modèles mathématiques, nous sommes souvent à la recherche d'une certaine fonction inconnue qui satisfait une équation et dont la dérivée joue un rôle important dans la description du phénomène traité. Une telle équation est appelée équation différentielle. Pour fixer les idées, nous serons intéressés à déterminer la fonction inconnue qui satisfait une égalité dans laquelle apparaissent certaines de ses dérivées. Avant de se plonger dans cette mission, nous avons besoin de rappeler quelques définitions et des informations préliminaires.

1.1 Définitions et terminologie

A chaque fois qu'un modèle mathématique implique un taux de variation d'une quantité par rapport à une autre, ce qu'on appelle équation différentielle est suceptible d'apparaître. L'équation différentielle qui résulte peut être plus ou moins compliquée suivant la situation. Dans les deux cas, une solution est recherchée afin d'analyser et ainsi comprendre le modèle étudié.

Définition 1.1 *Une* ***équation différentielle*** *notée en abrégé (ED) est une équation dont l'inconnue est une fonction (généralement notée y), dépendant d'une variable (généralement notée x ou t), et dans laquelle apparaissent certaines de ses dérivées ($y', y''..., y^{(n)}$).*

On rappelle que si y est une fonction qui dépend d'une variable x alors :

$y' = \dfrac{dy}{dx}$ désigne la dérivée première de la fonction y par rapport à sa variable x.

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ désigne la dérivée seconde de la fonction y par rapport à sa variable x.

$y^{(n)} = \dfrac{d^{(n)}y}{dx^n}$ désigne la dérivée d'ordre n de la fonction y par rapport à sa variable x.

Lorsqu'on dit, par exemple, que la fonction inconnue y dépend de x, on sous-entend que x est la **variable indépendante** et que y est la **variable dépendante**. Si dans une équation différentielle, la fonction inconnue (la variable dépendante) ainsi que toutes ses dérivées sont prises par rapport à une seule variable indépendante, on parle d'**équation différentielle ordinaire** qu'on notera en abrégé (EDO). Par contre, si la fonction inconnue dépend de plusieurs variables indépendantes (on a donc des dérivées partielles dans l'équation), l'équation est alors appelée **équation aux dérivées partielles** qu'on notera en abrégé (EDP).

Exemple 1.1 *Voici quelques exemples d'équations différentielles :*

1. $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 3x$
2. $(x + 2y)dx + xdy = 0$
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = y^2 + c$
4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Les équations 1, 2 et 3 sont des équations différentielles ordinaires (EDO) alors que l'équation 4 est une équation aux dérivées partielles (EDP). ■

On note que dans les équations 1 et 3, la variable dépendante est y et la variable indépendante est x. Par contre, les variables dépendante et indépendante ne sont pas bien définies dans l'équation 2 alors que si on divise cette équation par dy, on trouve que x est bien la variable dépendante et que y est la variable indépendante. A souligner que λ et c dans l'équation 3 ne sont ni des variables dépendantes, ni des variables indépendantes ; ils sont tout simplement des constantes.

Définition 1.2 *L'**ordre** d'une équation différentielle est défini comme étant l'ordre de la plus haute dérivée qui fait partie de l'équation.*

Si on revient aux exemples précédents, on voit que les équations 1 et 2 sont des ED d'ordre 1 alors que les équations 3 et 4 sont des ED d'ordre 2.

Remarque 1 *Dans ce livre, on s'intéresse aux équations différentielles ordinaires. Pour cela, on limitera nos discussions à ce type d'équations. Dorénavant, on confondra le terme ED avec le terme EDO.*

Comme les techniques de résolution font en général référence à une classe spécifique d'équations différentielles, terminons cette section par la définition suivante qui nous permettra de classifier les équations différentielles entre linéaires ou non linéaires.

Définition 1.3 *Une équation différentielle est dite* ***linéaire*** *en y (où y est la variable dépendante), si et seulement si, l'équation peut être écrite sous la forme suivante :*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \quad ... \quad + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x).$$

où a_i, $i = 0, ..., n$ et f sont des fonctions (connues).

Sinon, l'équation différentielle est dite ***non linéaire****.*

A noter que :

1. la fonction y et toutes ses dérivées apparaissent au 1^{er} degré et,
2. les coefficients a_i ainsi que le terme de droite dans l'équation dépendent au plus de la variable x.

Ci-dessous, on trouve quelques exemples d'équations différentielles linéaires et non linéaires.

Exemple 1.2 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin x\dfrac{dy}{dx} = x^7 - \tan x$

On voit bien que $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *et* $\dfrac{dy}{dx}$ *sont au* 1^{er} *degré.*

En plus, $a_2(x) = x^2$, $a_1(x) = \sin x$, $a_0(x) = 0$ *et* $f(x) = x^7 - \tan x$ *sont des fonctions dépendant de x seulement. Ainsi, l'ED est linéaire.* ■

Exemple 1.3 $y'' + y^3 = 0$

L'ED est non linéaire car la fonction y apparaît au cube. ■

Exemple 1.4 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin x\dfrac{dy}{dx} = x^7 - \tan y$

L'ED est non linéaire étant donné que le terme de droite dépend de x et d'une fonction de y qui n'est pas du premier degré. ■

Exemple 1.5 $x^2 \dfrac{d^3y}{dx^3} + \sin x \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x^2$

Il est évident que l'ED est non linéaire étant donné que le terme $\dfrac{dy}{dx}$ *est au second degré.* ■

Exemple 1.6 $\left(x^2 + \sin x\right) ydx + 3xdy = 0$

La présence des termes x^2dx *et* $\sin xdx$ *font que l'ED est non linéaire en* x*. Par contre, si on réécrit l'ED sous la forme* $3x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 + \sin x\right) y = 0$*, on voit clairement que l'ED est linéaire en* y*.* ■

Exercices 1.1

Dans les exercices 1 à 10, pour chaque équation, déterminer si elle est ordinaire ou partielle, linéaire ou non linéaire et donner son ordre :

1. $y' + \dfrac{x}{y} = 1$ *Rép.* Ordinaire, non linéaire, ordre 1
2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$
3. $x^5y'' + 2x^3y' + 3y = 0$ *Rép.* Ordinaire, linéaire, ordre 2.
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^2\dfrac{dy}{dx} = 10$
5. $y''' + y''y' = 5$ *Rép.* Ordinaire, non linéaire, ordre 3.
6. $\dfrac{d^3z}{dx^3} = z^2$
7. $x\dfrac{dx}{dt} + \sin t = k$, k-constante *Rép.* Ordinaire, non linéaire, ordre 1.
8. $xdy - ydx = 0$
9. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ *Rép.* Partielle, non linéaire, ordre 1
10. $y''' + (\ln x)\, y'' + 5y' + 2y = 7$

1.2 Solution des équations différentielles

Définition 1.4 *Une fonction réelle* $y = f(x)$ *est dite* ***solution*** *(explicite) d'une équation différentielle sur un intervalle réel* I*, si la substitution dans l'équation de* y *et ses dérivées, par* $f(x)$ *et ses dérivées donne une identité (i.e, satisfait l'ED) pour tout* $x \in I$*.*

La solution peut être donnée aussi implicitement sous la forme $f(x,y)=c$, $x \in I$ et c est une constante arbitraire. On rappelle que x est la variable indépendante et y est la variable dépendante.

Cette relation est dite solution implicite de l'ED si $f(x,y)=c$ définit une ou plusieurs solutions explicites de la forme $y=f(x)$ sur I. Dans les deux formats, que ça soit explicite ou implicite, on l'appellera solution. A noter qu'une solution $f(x,y)=c$ peut être aussi donnée sous la forme $x=x(t)$, $y=y(t)$. C'est ce qu'on appelle paramétrage d'une courbe solution.

Enfin, **résoudre** (ou **intégrer** ou **différencier**) une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble des fonctions qui en sont solutions sur un intervalle I.

Exemple 1.7 *Montrer que* $y=e^{-2x}$, $-\infty < x < \infty$ *est une solution de* $y''+y'-2y=0$.

Solution

Calculons la dérivée première et la dérivée seconde de $y=e^{-2x}$. *On obtient :* $y'=-2e^{-2x}$ *et* $y''=4e^{-2x}$. *En substituant dans l'équation différentielle, il vient que* $y''+y'-2y=4e^{-2x}-2e^{-2x}-2(e^{-2x})=0$ *pour toutes valeurs réelles de* x. *On déduit donc que* $y=e^{-2x}$ *est bien une solution de l'équation différentielle.* ■

Exemple 1.8 *Montrer que* $10x^2+5y^2=40$, $-2<x<2$ *est une solution de* $y\dfrac{dy}{dx}+2x=0$.

Solution

$10x^2+5y^2=40$ *définit deux fonctions réelles (Figure 1.1)* $y=+\sqrt{8-2x^2}$ *et* $y=-\sqrt{8-2x^2}$ *sur* $-2<x<2$.

Pour $y=+\sqrt{8-2x^2}$, *on a :* $y'=\dfrac{-2x}{\sqrt{8-2x^2}}$. *Par conséquence, on a pour tout* $-2<x<2$,

$$y\frac{dy}{dx}+2x=\sqrt{8-2x^2}\left(\frac{-2x}{\sqrt{8-2x^2}}\right)+2x=-2x+2x=0,$$

On a bien une identité. ■

Remarque 2 *Il existe une autre approche qui peut être utilisée pour vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une ED : c'est celle de la dérivation implicite. Cependant, dans certains cas, il faut faire attention ! Ainsi en dérivant, par exemple, la relation* $10x^2+5y^2=-40$ *terme par terme, on obtient* $20x+10yy'=0$ *qui s'écrit aussi en divisant par* 10 *de la forme* $y\dfrac{dy}{dx}+2x=0$.

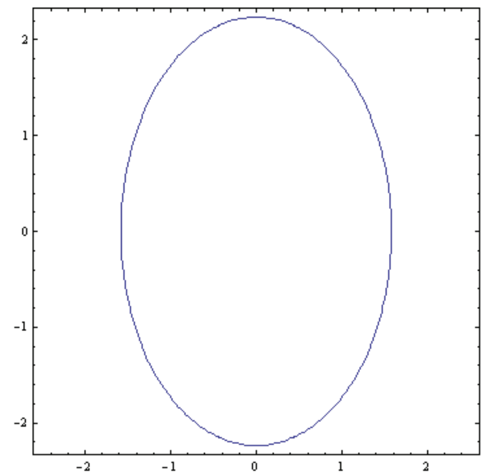

FIG. 1.1 – Exemple 1.8

On retrouve alors l'équation différentielle donnée dans l'exemple ci-dessus. Pourtant, la relation donnée n'est pas considérée comme solution de l'équation différentielle même si $10x^2 + 5y^2 = -40$ *satisfait bel et bien l'équation donnée. En effet,* $10x^2+5y^2 = -40$ *ne définit aucune fonction réelle* $y = f(x)$ *sur n'importe quel intervalle réel* I *puisque la relation elle-même n'est pas satisfaite pour aucune valeur réelle* x *et* y *et n'a donc pas de sens.*

Exemple 1.9 *Montrer que* $y = f(x) = 2\sin x + 3\cos x, \quad -\infty < x < \infty$ *est une solution de*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Solution

Calculons la dérivée première et la dérivée seconde de $y = f(x)$. *On trouve*

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) = 2\cos x - 3\sin x, \text{ et} \\ y'' &= f''(x) = -2\sin x - 3\cos x. \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation différentielle, on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = (-2\sin x - 3\cos x) + 2\sin x + 3\cos x = 0,$$

qui est valide pour tout réel x. ■