Chapitre 1

Calculs algébriques élémentaires

1. La valeur absolue

Rappel de cours.

Soit x un nombre réel, on définit la valeur absolue de x par : $\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geqslant 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On constate, avec cette définition, que $|x|$ est nécessairement un nombre positif ou nul. En fait, $|x|$ représente la distance du point M d'abscisse x à l'origine sur la droite graduée des réels.

Voici à présent quelques techniques usuelles permettant de résoudre des équations ou inéquations comportant des valeurs absolues.

Méthode 1 (Équations ou inéquations de référence)**.**

Pour résoudre une équation (ou inéquation) avec des valeurs absolues, on peut essayer de se ramener à l'une des situations suivantes ($a \in \mathbb{R}^+$) :

1. $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$,
2. $|x| \leqslant a \Leftrightarrow x \in [-a\,;\,a]$,
3. $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,-a] \cup [a\,;\,+\infty[$.

Application : exercices 1 et 2.

Remarque. Les résultats énoncés dans la méthode précédente se retrouvent à l'aide d'un dessin.

Méthode 2 (Mise au carré)**.**

Pour tout réel x, on a $|x|^2 = x^2$. C'est donc un moyen de faire "sauter" une valeur absolue ce qui est peut être intéressant si les expressions générées par la mise au carré restent "raisonnables".

Application : exercice 3.

Remarque. On retiendra également que pour tout x réel, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Méthode 3 (Examiner le signe des quantités).

Lorsqu'on ne peut pas se ramener aux configurations ci-dessus, on peut alors envisager différents cas en étudiant au préalable le signe des quantités intervenant dans les valeurs absolues et en utilisant la définition de la valeur absolue. Cela conduit donc à résoudre l'équation ou l'inéquation sur différents intervalles (les valeurs absolues auront disparu).

Application : exercice 4.

Exercice 1 (★).

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x-2| = 4$,
2. $|x+5| = -3$.

Solution.

1. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |x-2| = 4 &\Leftrightarrow x-2=-4 \quad \text{ou} \quad x-2=4 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \quad \text{ou} \quad x=6. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \{-2\ ;\ 6\}$.

2. Une valeur absolue ne peut pas être strictement négative, donc $\mathscr{S} = \emptyset$.

Exercice 2 (★★).

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

1. $|x+3| \leqslant 2$,
2. $|x-1| > 5$.

Solution.

1. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |x+3| \leqslant 2 &\Leftrightarrow -2 \leqslant x+3 \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant -1. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = [-5\ ;\ 1]$.

2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |x-1| > 5 &\Leftrightarrow x-1<-5 \quad \text{ou} \quad x-1>5 \\ &\Leftrightarrow x<-4 \quad \text{ou} \quad x>6. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ -4[\cup]6\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3 (★★★).

Soit x et y deux réels. Démontrer que $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.
Cette inégalité est appelée "inégalité triangulaire".

Solution.
On a les équivalences suivantes (la première résultant de la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$) :

$$\begin{aligned}
|x+y| \leqslant |x|+|y| &\Leftrightarrow |x+y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy \leqslant |x|^2+|y|^2+2|x||y| \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy \leqslant x^2+y^2+2|x||y| \\
&\Leftrightarrow 2xy \leqslant 2|x||y| \\
&\Leftrightarrow xy \leqslant |x||y|
\end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant vraie, la première est aussi vraie.

Exercice 4 (★★★).

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|x+1| = 4-|3x+2|$.

Solution.
On a les équivalences suivantes :

$$x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$$

et

$$3x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{2}{3}.$$

On distingue alors trois cas :

- **Sur** $]-\infty\,;\,-1]$**.**

$$\begin{aligned}
|x+1| = 4-|3x+2| &\Leftrightarrow -(x+1) = 4-(-(3x+2)) \\
&\Leftrightarrow -x-1 = 4+3x+2 \\
&\Leftrightarrow -4x = 7 \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{7}{4} \in]-\infty\,;\,-1].
\end{aligned}$$

- **Sur** $\left[-1\,;\,-\frac{2}{3}\right[$**.**

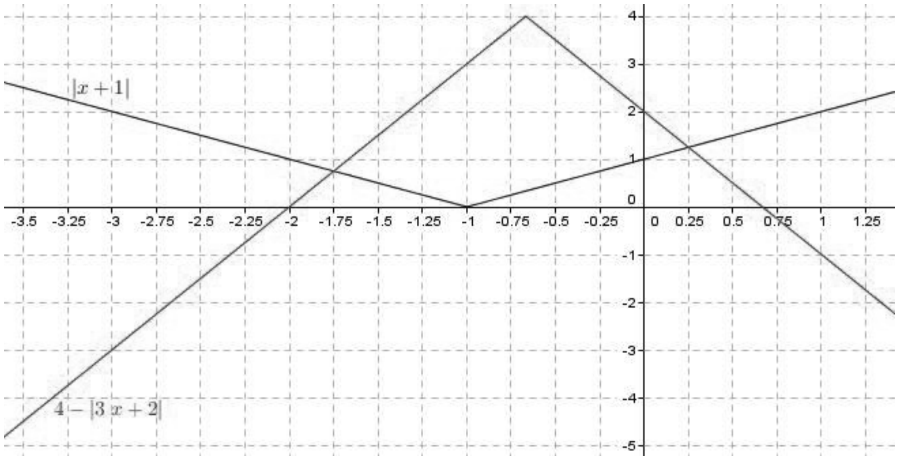
$$\begin{aligned}
|x+1| = 4-|3x+2| &\Leftrightarrow x+1 = 4-(-(3x+2)) \\
&\Leftrightarrow x+1 = 4+3x+2 \\
&\Leftrightarrow -2x = 5 \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \notin \left[-1\,;\,-\frac{2}{3}\right[.
\end{aligned}$$

- **Sur** $\left[-\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$**.**

$$\begin{aligned}
|x+1| = 4-|3x+2| &\Leftrightarrow x+1 = 4-(3x+2) \\
&\Leftrightarrow x+1 = 4-3x-2 \\
&\Leftrightarrow 4x = 1 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \in \left[-\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[.
\end{aligned}$$

Au final, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{7}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right\}$.

Ceci est confirmé par la lecture graphique suivante :



2. Résolution d'équations et d'inéquations polynomiales

Lorsque l'on veut résoudre une équation polynomiale de degré supérieur ou égal à 2, l'idée est de factoriser et d'utiliser la propriété du produit nul. Or pour cela, il faut commencer par avoir un second membre (le membre de droite de l'égalité) nul. Et ainsi, résoudre l'équation revient à chercher les racines (si elles existent) du polynôme formé par le premier membre. Nous allons voir quelques cas où on sait factoriser à commencer par le cas classique du second degré :

Rappel de cours (Résolution d'une équation de degré 2)**.**

Soit (E) une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ revient à chercher les racines de la fonction polynôme définie par $P(x)=ax^2+bx+c$. Pour cela, on utilise le discriminant, $\Delta = b^2-4ac$, de P :

1. Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
   On a alors : $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ pour tout x réel.
2. Si $\Delta = 0$, alors P admet une unique racine (double) $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
   On a alors : $P(x) = a(x-x_0)^2$ pour tout x réel.
3. Si $\Delta < 0$, P n'a pas de racine réelle.

Application : exercices 1 et 3.

Méthode 1 (Comment résoudre une équation polynomiale de dégré supérieur ou égal à 3 ?)**.**

Lorsqu'aucune indication n'est fournie, l'idée est de chercher des racines évidentes et de factoriser. En effet, notons P la fonction polynôme de degré $n \geqslant 2$ que l'on cherche à factoriser. Si on constate que P s'annule en un réel a, alors on peut écrire $P(x) = (x-a)Q(x)$ où Q est une fonction polynôme de degré $n-1$. On a donc "abaissé" le degré de l'équation.

Application : exercice 2.

Méthode 2 (Comment résoudre une inéquation polynomiale ?)**.**

Pour résoudre une inéquation polynomiale, la stratégie est la même que pour une équation : on se ramène à un second membre nul et on factorise. Ensuite, il reste juste à étudier le signe de chaque facteur, à consigner les informations dans un tableau de signes (en utilisant la règle des signes pour un produit ou un quotient) et à conclure.

Application : exercice 4.

Exercice 1 (★)**.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(E)\ :\ |x^2-2x+3|=2$.

Solution.
$|x^2-2x+3|=2 \Longleftrightarrow x^2-2x+3=2$ ou $x^2-2x+3=-2$.

- **Résolution de** $x^2-2x+3=2$**.**

  $x^2-2x+3=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

  La seule solution de $x^2-2x+3=2$ est 1.
- **Résolution de** $x^2-2x+3=-2$**.**

  $x^2-2x+3=-2 \Leftrightarrow x^2-2x+5=0$. On pose $P(x)=x^2-2x+5$ et on calcule son discriminant : $\Delta=-16$. Ainsi le polynôme P n'a aucune racine réelle et donc l'équation $x^2-2x+3=-2$ n'a pas de solution réelle.

Au final, l'ensemble solution de (E) est $\mathscr{S}=\{1\}$.

Exercice 2 (★★)**.**

Soit $P(x)=x^3-x^2-4x+4$.

1. Déterminer une racine évidente de P.
2. Déterminer alors la factorisation de P.
3. Résoudre $P(x)>0$.

Solution.

1. On remarque que $P(1)=0$ donc 1 est une racine évidente de P.
2. Ainsi, il existe une fonction polynôme Q de degré 2 telle que $P(x)=(x-1)Q(x)$ et on peut donc écrire qu'il existe trois réels a, b et c tels que $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

   Or, $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

   Comme deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, par identification, on trouve : $\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ b-a & = & -1 \\ c-b & = & -4 \\ -c & = & 4 \end{array}\right.$

   et on obtient $a=1$, $b=0$ et $c=-4$.

   Donc $P(x)=(x-1)(x^2-4)=(x-1)(x-2)(x+2)$.

3. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution de $P(x)>0$ est $\mathscr{S}=]-2\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3 (★★).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E)\ :\ x^4+2x^2-1=2$ (on pourra penser à utiliser le changement de variable $X=x^2$).

Solution.
$x^4+2x^2-1=2 \Leftrightarrow x^4+2x^2-3=0$.
On pose $X=x^2$ et on cherche les racines de P où $P(X)=X^2+2X-3$. Or, $\Delta_P=16>0$ donc P admet deux racines distinctes $X_1=-3$ et $X_2=1$. Or $X=x^2\geqslant 0$ donc on ne conserve que la racine positive de P.
On cherche alors les valeurs de x telles que $x^2=1$. L'ensemble solution de (E) est donc $\mathscr{S}=\{-1\ ;\ 1\}$.

Remarque. Les équations de degré 4 ne faisant intervenir que des puissances paires de x sont appelées des équations bi-carrées et se résolvent toujours en faisant le changement de variables $X=x^2$ ce qui permet de se ramener à une équation de degré 2.

Exercice 4 (★★★).

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{|x-3|}\leqslant x-1$.

Solution.
On remarque tout d'abord que sur $]-\infty\ ;\ 1[$, $x-1<0$ donc il n'y a pas de solution sur cet intervalle puisque $\sqrt{|x-3|}\geqslant 0$.

On cherche donc uniquement des solutions sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$. Sur cet intervalle, les deux membres sont positifs, et donc on peut utiliser la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}\sqrt{|x-3|}\leqslant x-1 &\Leftrightarrow |x-3|\leqslant (x-1)^2\\ &\Leftrightarrow |x-3|\leqslant x^2-2x+1.\end{aligned}$$

Comme $x-3\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 3$, on est naturellement amené à résoudre sur deux intervalles différents pour faire disparaître la valeur absolue :

- **Sur** $[1\ ;\ 3[$**.**

$$\begin{aligned}|x-3|\leqslant x^2-2x+1 &\Leftrightarrow -(x-3)\leqslant x^2-2x+1\\ &\Leftrightarrow -x+3\leqslant x^2-2x+1\\ &\Leftrightarrow 0\leqslant x^2-x-2.\end{aligned}$$

On note $P(x) = x^2 - x - 2$ et on calcule le discriminant du polynôme P : $\Delta = 9 > 0$ donc P admet deux racines distinctes $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or, on a restreint l'étude à l'intervalle $[1\,;\,3[$, donc on ne retient que les $x \in [2\,;\,3[$.

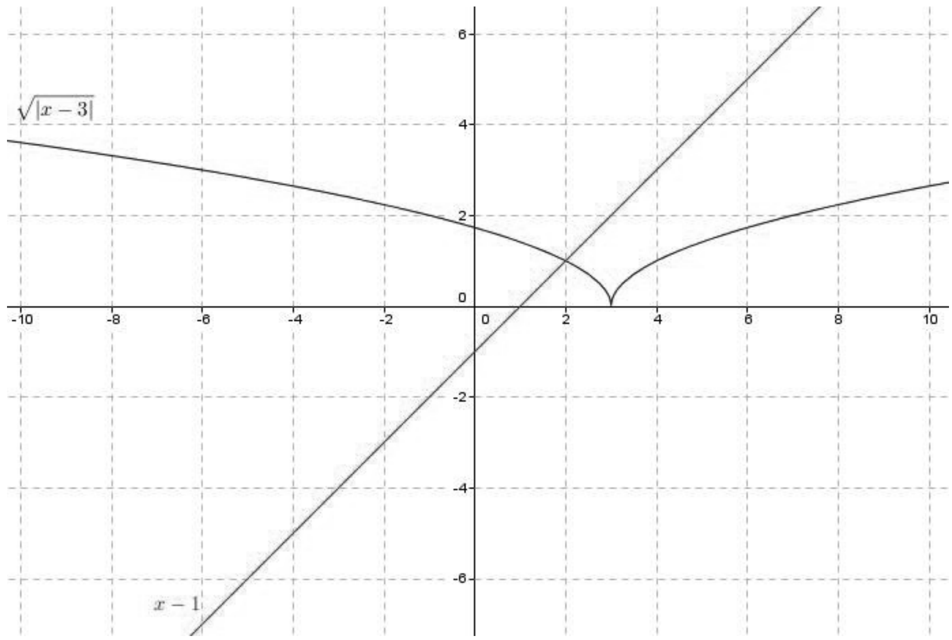
- **Sur** $[3\,;\,+\infty[$**.**

$$\begin{aligned} |x-3| \leqslant x^2 - 2x + 1 &\Leftrightarrow x - 3 \leqslant x^2 - 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 - 3x + 4. \end{aligned}$$

On note $Q(x) = x^2 - 3x + 4$ et on calcule le discriminant du polynôme Q : $\Delta = -7 < 0$. On sait que la fonction polynôme Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est strictement positive (du signe de a qui est 1 ici). Donc, tous les $x \in [3\,;\,+\infty[$ sont solutions de l'inéquation étudiée sur l'intervalle $[3\,;\,+\infty[$.

Au final, $\mathscr{S} = [2\,;\,3[\cup[3\,;\,+\infty[= [2\,;\,+\infty[$.

Cette résolution est confirmée par la lecture graphique suivante :



3. Résolution d'équations et d'inéquations rationnelles

Méthode 1 (Comment résoudre une équation rationnelle ?)**.**

Lorsque l'on doit résoudre une équation rationnelle, le premier réflexe à avoir est d'étudier l'ensemble de définition (en effet, le dénominateur ne doit pas s'annuler !).
Comme pour une équation polynomiale, on se ramène à un second membre nul. Ensuite, on fait une réduction au même dénominateur (si besoin est). Finalement, on utilise le fait qu'une équation rationnelle est nulle si, et seulement si, son numérateur est nul pour se ramener à une équation polynomiale.

Application : exercice 1.

Méthode 2 (Comment résoudre une inéquation rationnelle ?)**.**

Pour résoudre une inéquation rationnelle, on doit d'abord chercher l'ensemble de définition. Ensuite, on se ramène à un second membre nul, on réduit au même dénominateur et on étudie séparément le signe du numérateur et du dénominateur (qui sont deux fonctions polynômes) puis on conclut en utilisant la règle des signes d'un quotient.

Application : exercice 2.

Exercice 1 (★).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E)\ :\ \dfrac{x^2-3x+4}{x+5} = 2$.

Solution.
On cherche les solutions sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-3x+4}{x+5} = 2 &\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+4}{x+5} - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+4}{x+5} - \frac{2x+10}{x+5} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-5x-6}{x+5} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2-5x-6 = 0.
\end{aligned}$$

On pose $P(x) = x^2-5x-6$. Donc $\Delta_P = 49 > 0$. Donc P admet deux racines distinctes $x_1 = -1$ et $x_2 = 6$. Ainsi, l'ensemble solution de (E) est $\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 6\}$ (car les solutions trouvées sont différentes de -5).

Exercice 2 (★).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I)\ :\ \dfrac{4x^2-3x-9}{x^2-5} \leqslant 2$.