1
Ensembles de nombres
Egalités. Inégalités
Equations. Inéquations

1. DIFFERENTS ENSEMBLES DE NOMBRES

1.1. Ensembles de nombres

On rappelle les notations suivantes :
$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels ;
$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs ;
$\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux ;
$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels ;
$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
Ces ensembles sont inclus les uns dans les autres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
L'inclusion $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ par exemple signifiant simplement que tout nombre décimal est un nombre rationnel particulier.
On a aussi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}_+$ (ensemble des réels positifs), $\mathbb{R}_-$ (ensemble des réels négatifs), $\mathbb{R}^*$ (ensemble des réels non nuls), symboles que l'on peut combiner. Par exemple, $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

✍ Exercice d'application 1

Déterminer, parmi les ensembles cités ci-dessus, le plus petit auquel appartiennent les nombres suivants (par exemple, le plus petit ensemble auquel appartient le nombre $\frac{2}{3}$ est $\mathbb{Q}$, car $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$) : -3 ; $\frac{10}{5}$; $-\frac{7}{8}$; $-\frac{8}{7}$; 3,14 ; π.

- $-3 \notin \mathbb{N}$ et :

$$\boxed{-3 \in \mathbb{Z}}$$

- $\frac{10}{5} = 2$ donc :

$$\boxed{\frac{10}{5} \in \mathbb{N}}$$

- $-\frac{7}{8} = -0{,}875$ (nombre fini de chiffres après la virgule), donc $-\frac{7}{8} \notin \mathbb{Z}$ et :

$$\boxed{-\frac{7}{8} \in \mathbb{D}}$$

- L'écriture décimale de $-\frac{8}{7}$ comporte une infinité de chiffres après la virgule, donc $-\frac{8}{7} \notin \mathbb{D}$ et :

$$\boxed{-\frac{8}{7} \in \mathbb{Q}}$$

- Clairement, $3{,}14 \notin \mathbb{Z}$ et :

$$\boxed{3{,}14 \in \mathbb{D}}$$

- $\pi \notin \mathbb{Q}$ (résultat non évident… et dont la démonstration est impossible en seconde ; nous l'admettrons donc) et :

$\boxed{\pi \in \mathbb{R}}$ (évidemment).

1.2. Intervalles de $\mathbb{R}$

a et *b* étant deux réels donnés (avec $a \le b$), on note $[a\ ;\ b]$ l'ensemble de tous les nombres réels compris entre *a* et *b*, c'est-à-dire l'ensemble des nombres à la fois supérieurs (ou égaux) à *a* et inférieurs (ou égaux) à *b* :
Dire que $x \in [a\ ;\ b]$ revient à dire que $a \le x \le b$.
On note $[a\ ;\ +\infty[$ (respectivement $]-\infty\ ;\ a]$) l'ensemble des nombres supérieurs ou égaux à *a* (respectivement inférieurs ou égaux à *a*).
On définit de la même façon les intervalles $]a\ ;\ b[$ (remplacer dans l'encadrement les inégalités larges par des inégalités strictes), $[a\ ;\ b[$, $]a\ ;\ +\infty[$, etc.

La *réunion* de deux intervalles est l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'un *ou* à l'autre des deux intervalles. La réunion de deux intervalles I et J est notée $I \cup J$.

✍ Exercice d'application 2

Compléter le tableau suivant :

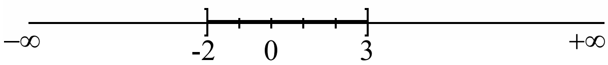
Intervalle(s)	Inégalité(s)
$x \in [2 \ ; \ 4]$	
	$x > -1$
	$-2 < x \leq 3$
$x \in]-\infty \ ; \ 1]$	
$x \in]\sqrt{2} \ ; \ +\infty[$	
	$x > 2$ et $x < 5$
	$x > 4$ ou $x \leq -3$
$x \in [0 \ ; \ 1] \cup]3 \ ; \ +\infty[$	

Corrigé

Intervalle(s)	Inégalité(s)
$x \in [2 \ ; \ 4]$	$2 \leq x \leq 4$
$x \in]-1 \ ; \ +\infty[$	$x > -1$
$x \in]-2 \ ; \ 3]$	$-2 < x \leq 3$
$x \in]-\infty \ ; \ 1]$	$x \leq 1$
$x \in]\sqrt{2} \ ; \ +\infty[$	$x > \sqrt{2}$
$x \in]2 \ ; \ 5[$	$x > 2$ et $x < 5$
$x \in]-\infty \ ; \ -3] \cup]4 \ ; \ +\infty[$	$x > 4$ ou $x \leq -3$
$x \in [0 \ ; \ 1] \cup]3 \ ; \ +\infty[$	$0 \leq x \leq 1$ ou $x > 3$

Remarques :

- Ces différents intervalles peuvent être représentés graphiquement sur un axe ; par exemple, pour l'intervalle $]-2\ ;\ 3]$:



- La réunion de deux intervalles (ou plus, le cas échéant), doit être écrite "dans le bon ordre" ; par exemple, il serait incorrect d'écrire $]4\ ;\ +\infty[\cup]-\infty\ ;\ -3]$ au lieu de $]-\infty\ ;\ -3]\cup]4\ ;\ +\infty[$.

2. METHODES DE DEMONSTRATION D'UNE EGALITE

Pour démontrer une égalité du type $A = B$, on peut :

- Partir de l'expression de A et effectuer les calculs nécessaires pour trouver B.
- Calculer la différence $A - B$ et tenter de trouver 0.
- Calculer séparément A et B et tenter de trouver le même résultat dans les deux cas.
- Utiliser une égalité connue et effectuer des opérations (ajouter à gauche et à droite de l'égalité un même nombre, multiplier par un même nombre, etc.) permettant d'arriver à l'égalité demandée.

Remarque :

Il serait absurde de partir de l'égalité demandée pour arriver à la fin du calcul à une égalité du type " $0 = 0$ " ! En aucun cas, on ne doit partir de ce qu'on doit démontrer.

✍ Exercice d'application 3

On pose : $a = \sqrt{2} - 1$.

Démontrer que $a^2 + 2a = 1$ et que $\dfrac{1}{a} = a + 2$.

1ère méthode : on va calculer a^2+2a et tâcher de trouver 1.

$$a^2+2a=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$=\sqrt{2}^2-2\times\sqrt{2}\times 1+1^2+2\sqrt{2}-2$$

Rappel : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$=2-2\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-2$$

$$=1.$$

On peut bien conclure que :

$$\boxed{a^2+2a=1}$$

2ème méthode : on va partir d'une égalité connue (ici, il n'y a pas tellement de choix : $a=\sqrt{2}-1$) et on va arriver à l'égalité demandée.

$a=\sqrt{2}-1$, donc $a+1=\sqrt{2}$. En élevant au carré : $(a+1)^2=\sqrt{2}^2$. On développe : $a^2+2a+1=2$. Il vient alors :

$$\boxed{a^2+2a=1}$$

Cette dernière méthode est clairement plus rapide et moins calculatoire ; elle nécessite cependant plus d'intuition que la première méthode exposée afin de trouver les différentes étapes du calcul.

Pour la deuxième égalité à démontrer, on va proposer trois méthodes.

1ère méthode : commençons par calculer $\frac{1}{a}$. Avec un peu de chance, on trouvera $a+2$… Sinon, on calculera également $a+2$.

$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$ (on multiplie numérateur et dénominateur par le même nombre, ici $\sqrt{2}+1$, de façon à obtenir un dénominateur s'écrivant sans racines, ce dont le lecteur sera convaincu dans quelques lignes – cette technique est connue sous le nom de *quantité conjuguée*).

$$\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2}$$

Rappel : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1.$$

Comme on ne reconnaît pas dans ce résultat $a+2$ (quoique…), on va calculer $a+2$:

$a+2=\sqrt{2}-1+2=\sqrt{2}+1$.

Les deux calculs de $\frac{1}{a}$ et de $a+2$ donnent le même résultat, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\frac{1}{a}=a+2}$$

$2^{ème}$ *méthode :* on va calculer la différence $\frac{1}{a}-(a+2)$ et tâcher de trouver 0.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}-(a+2)&=\frac{1}{a}-\frac{a(a+2)}{a}\\&=\frac{1-a(a+2)}{a}\\&=\frac{1-(a^2+2a)}{a}.\end{aligned}$$

Or, on a démontré précédemment que $a^2+2a=1$. Dans l'égalité ci-dessus, on peut donc remplacer a^2+2a par 1 :

$$\frac{1}{a}-(a+2)=\frac{1-1}{a}=\frac{0}{a}=0.$$

On a bien $\frac{1}{a}-(a+2)=0$ ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\frac{1}{a}=a+2}$$

$3^{ème}$ *méthode :* on va partir d'une égalité conne pour arriver à l'égalité demandée.
On sait que $a^2+2a=1$. En divisant les deux membres de cette égalité par a, on obtient :

$\frac{a^2}{a}+\frac{2a}{a}=\frac{1}{a}$. En simplifiant :

$$\boxed{a+2=\frac{1}{a}}$$

3. METHODES DE DEMONSTRATION D'UNE INEGALITE

Pour démontrer une inégalité du type $A\le B$, on peut :

- Calculer la différence $A-B$ et tenter de trouver un résultat négatif (ou bien calculer la différence $B-A$ et tenter de trouver un résultat positif).
- Prouver qu'il existe un nombre C tel que $A\le C$ et $C\le B$.

- Partir d'une inégalité connue et effectuer des opérations (ajouter à gauche et à droite de l'égalité un même nombre, multiplier par un même nombre, etc.) permettant d'arriver à l'inégalité demandée.

Remarques :

- La première méthode exposée ci-dessus est de loin la plus générale et la plus utilisée (du moins en seconde) ;
- Attention que les inégalités se manipulent avec plus de soin que les égalités ; retenons pour l'instant les deux *théorèmes de rangement* suivants :
  - Si $A \le B$, alors, pour tout nombre K : $A+K \le B+K$ et $A-K \le B-K$ (on peut ajouter ou soustraire un même nombre à gauche et à droite d'une inégalité).
  - Si $A \le B$, alors, pour tout nombre K : $KA \le KB$ si $K \ge 0$ et $KA \ge KB$ si $K \le 0$ (on peut multiplier par un même nombre à gauche et à droite d'une inégalité sans changer le sens de l'inégalité si ce nombre est positif, en changeant le sens de l'inégalité si ce nombre est négatif).
- *Comparer* deux nombres A et B, c'est déterminer si $A \le B$ ou si $A \ge B$. D'après la première méthode ci-dessus, pour comparer deux nombres, on doit donc calculer leur différence et étudier le signe du résultat.

✍ Exercice d'application 3

Comparer les nombres suivants :

a) $\frac{4}{5}$ et $\frac{5}{6}$; **b)** $\frac{3}{\pi}$ et $\frac{\pi}{3}$; **c)** x^2 et $2x-1$ (où x est un réel quelconque).

d) $1-10^{-20}$ et $\frac{1}{1+10^{-20}}$ (on pourra poser $a=10^{-20}$).

Corrigé

Dans chacun des quatre cas, on va calculer la différence des deux nombres proposés et étudier le signe du résultat.

a) $\frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{4\times 6}{5\times 6}-\frac{5\times 5}{6\times 5}$

$=\frac{24-25}{30}=\frac{-1}{30}.$

Or $\frac{-1}{30}<0$, donc :

$$\boxed{\frac{4}{5} < \frac{5}{6}}$$

b) $\dfrac{3}{\pi} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{9-\pi^2}{3\pi}$.

Comme on ne connaît pas le signe de $9-\pi^2$, il faut continuer le calcul ; l'idée est de factoriser le plus possible, car on a une règle des signes pour un produit ou pour un quotient, mais pas pour une somme ou une différence :

$\dfrac{3}{\pi} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{(3-\pi)(3+\pi)}{3\pi}$. Il nous reste à étudier le signe de ce résultat. Pour cela, procédons par étapes :

D'une part, $3-\pi<0$ (car on sait que $\pi>3$) ; d'autre part, $3+\pi>0$ (évident) et $3\pi>0$ (tout aussi évident). La règle des signes permet alors d'affirmer que $\dfrac{(3-\pi)(3+\pi)}{3\pi}<0$. On en déduit que :

$$\boxed{\frac{3}{\pi} < \frac{\pi}{3}}$$

Remarque : on aurait aussi pu remarquer que, puisque $\pi>3$, on a $\dfrac{3}{\pi}<1$ et $\dfrac{\pi}{3}>1$, ce qui prouve que $\dfrac{3}{\pi}<\dfrac{\pi}{3}$.

c) $x^2-(2x-1) = x^2-2x+1$

$= (x-1)^2$.

Or $(x-1)^2 \geq 0$, donc :

$$\boxed{x^2 \geq 2x-1} \text{ pour tout } x.$$

d) Remarquons qu'ici la calculatrice n'est d'aucune aide, puisqu'elle affiche, dabs le meilleur des cas, $1-10^{-20}=1$ et $\dfrac{1}{1+10^{-20}}=1$ … (N'oublions pas qu'une calculatrice ne fournit que des valeurs *approchées*).

Pour alléger les notations, posons $a=10^{-20}$ et calculons la différence :

$$\begin{aligned} 1-a-\frac{1}{1+a} &= \frac{(1-a)(1+a)-1}{1+a} \\ &= \frac{1-a^2-1}{1+a} \\ &= \frac{-a^2}{1+a}. \end{aligned}$$