CHAPITRE 1 :

MÉTHODES D'ÉTUDES DES ESPACES VECTORIELS

Commençons tout en douceur par ce premier chapitre d'algébre linéaire. Souvenez-vous de vos promenades de l'an passé dans $\mathbb{K}^n$... Cette année, vous généralisez. De $\mathbb{K}^n$, vous passez aux espaces vectoriels de dimension parfois infinie. Si vous avez bien compris les cours de BCPST1, cette généralisation ne devrait pas être si difficile. En dimension finie, les méthodes seront très similaires à celle de $\mathbb{K}^n$. En dimension infinie, il faudra prendre un peu plus de précaution ! ,
Signalons que, dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera, comme d'habitude, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Les espaces vectoriels

A) Quelques généralités...

MÉTHODE 1 : Montrer que E est un espace vectoriel

■ **Cas particuliers :**
Voici quelques ensembles qui sont, d'après votre cours, des espaces vectoriels :
- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, $\mathcal{C}^0(I)$, $\mathcal{C}^k(I)$, $\mathcal{C}^\infty(I)$.
- $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{C}_n[X]$.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.
- L'ensemble des fonctions paires (resp. impaires).
- L'ensemble des fonctions T-périodiques (T fixé bien sûr !).
- les variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.
- Tout espace de la forme Vect $(e_1, \cdots, e_n)$.

Une fois ces espaces acquis, on peut, par opérations, construire d'autres espaces vectoriels, les ensembles suivants sont aussi des espaces vectoriels :
- L'intersection de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel.
- Le noyau d'une application linéaire, l'image d'une application linéaire.
- La somme de deux sous-espaces vectoriels.

■ **Principe :**
Prenons E un ensemble qui n'est pas un cas particulier décrit juste avant. Pour montrer que E, ensemble sur lequel on a définit deux lois $(+, \times)$ (la loi $+$ définit l'addition entre les éléments de E et la loi $\times$ définit la multiplication entre scalaires et éléments de E), est un espace vectoriel, trois étapes sont habituelles :
Etape 1 : On cherche un espace A vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. Etre un espace vectoriel.
2. Contenir E.
3. Les lois $(+, \times)$ de E sont les restrictions à E des lois $(+, \times)$ de A.

Etape 2 : On montre que 0_A, le vecteur nul de A, appartient à E.
Etape 3 : On prend x et y deux éléments quelconques de E, λ un élément quelconque de $\mathbb{K}$. On prouve alors que $\lambda x + y$ appartient encore à E.

■ ***Exemple* :**

On appelle A l'ensemble des polynômes de degré 10 à coefficients réels, B l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et C l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ (n entier naturel non nul) s'annulant en 4. Ces ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

A ne contient pas le polynôme nul (car ce dernier n'est pas de degré 10), A n'est donc pas un espace vectoriel.
$f : x \mapsto x^2 + 1$ est dans B, $-f$ n'est pas dans B (car $-f$ n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}^+$). B n'est pas stable par multiplication par un scalaire, B n'est donc pas un espace vectoriel.
C est une partie de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel. Vérifions les deux conditions :

1. 0 est dans C puisque le polynôme nul est bien dans $\mathbb{R}_n[X]$ et s'annule en particulier en 4.
2. Prenons P_1 et P_2 deux éléments de C. Soit λ un réel. $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel donc $\lambda P_1 + P_2$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$. D'autre part, de $P_1(4) = P_2(4) = 0$, on en déduit :

$$(\lambda P_1 + P_2)(4) = \lambda P_1(4) + P_2(4) = 0.$$

Ainsi, $\lambda P_1 + P_2$ appartient à C.
C est donc bien un espace vectoriel. On aurait pû le prouver en voyant C comme le noyau de l'application linéaire suivante :

$$\varphi : P \mapsto P(4).$$

MÉTHODE 2 : Montrer des relations entre sev

■ **Principe :**
Par relation, on entend les problèmes d'inclusion et d'égalité. Détaillons ces deux problèmes.

- **Inclusion :**
  Pour prouver que $E \subset F$ (avec E et F deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel A), on prend un élément quelconque de E et on montre qu'il est dans F. Comme F est stable par somme, on peut se contenter de prouver qu'une famille génératrice quelconque de E est dans F, il suffit, pour conclure d'ajouter que si F contient cette famille $(e_1, \cdots, e_n)$ alors il contient $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ car, par définition, le plus petit espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant $(e_1, \cdots, e_n)$ est $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ et F est un espace vectoriel. F contient donc E (puisque $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ est E car $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice de E).
- **Egalité :**
  Pour prouver que $E = F$, il suffit, comme pour tout ensemble, de montrer que $E \subset F$ et $F \subset E$. Si E et F sont de dimension finie, on peut commencer par chercher $\dim(E)$ et $\dim(F)$. Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors il suffit de prouver une seule inclusion pour avoir l'égalité (réfléchissez pour faire le plus simple entre $E \subset F$ et $F \subset E$). Si $\dim(E) \neq \dim(F)$ alors on peut conclure que $E \neq F$.

■ ***Exemple*** :

Soient E et F les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par : $((2,3,-1),(1,-1,-2))$ et $((3,7,0),(5,0,-7))$. Montrer que $E = F$.

Déjà, une base de E est $((2,3,-1),(1,-1,-2))$ car $((2,3,-1),(1,-1,-2))$ est une famille génératrice de E par définition et c'est une famille libre (2 vecteurs non colinéaires). E est donc de dimension 2... et F aussi pour la même raison.
Il nous reste donc une simple inclusion à faire. Il est a priori plus simple de montrer que $(2,3,-1)$ et $(1,-1,-2)$ sont dans F (grâce aux 0 dans les coordonnées de la base $((3,7,0),(5,0,-7))$ de F qu'on utilise ici) que de montrer que E contient $(3,7,0)$ et $(5,0,-7)$.
$(2,3,-1)$ et $(1,-1,-2)$ sont dans F car F est engendré par $((3,7,0),(5,0,-7))$ et :

$$(2,3,-1) = \frac{3}{7} \cdot (3,7,0) + \frac{1}{7} \cdot (5,0,-7) \text{ et } (1,-1,-2) = \frac{-1}{7} \cdot (3,7,0) + \frac{2}{7} \cdot (5,0,-7)$$

F contient donc les vecteurs $(2,3,-1)$ et $(1,-1,-2)$. Or le plus petit espace vectoriel contenant les vecteurs $(2,3,-1)$ et $(1,-1,-2)$ est par définition $\text{Vect}((2,3,-1),(1,-1,-2))$ et F est un espace vectoriel. F contient donc $\text{Vect}((2,3,-1),(1,-1,-2))$, c'est-à-dire E. De plus, E et F sont tous les deux de dimension 2, ils sont donc égaux.

MÉTHODE 3 : Trouver des équations cartésiennes d'un sev

■ **Principe :**
Soit A un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Voici quelques étapes qui vous conduiront droit aux équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel de A nommé E :

1. On commence par chercher une famille génératrice $(e_1, \cdots, e_n)$ de E.
2. On écrit le système linéaire en rapport avec cette famille en disant qu'un vecteur quelconque x de A appartient à E si et seulement si x

peut s'écrire sous la forme suivante : $a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$. On obtient donc un système d'inconnue $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ suivant :

$$x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n.$$

3. On explicite ce système en utilisant les coordonnées des vecteurs x, e_1, ..., e_n dans une base de A.
4. On résout ce dernier système qui mêle les coordonnées de x et les a_i. Il n'est compatible que pour les vecteurs x de E. On cherche donc toutes les équations de compatibilité de ce système (Equations ne faisant intervenir que les coordonnées de x). Ce sont les équations cartésiennes que l'on cherchait.

■ ***Exemple*** **:**

On pose $E =$ *Vect* $((1,0,0,2),(2,3,0,1))$. *Soit* $v = (x,y,z,t)$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^4$. *Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur* x, y, z *et* t *pour que* v *appartienne à* E.

Soit $v = (x,y,z,t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
v \in E \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x,y,z,t) = a(1,0,0,2) + b(2,3,0,1) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{lcl} x &=& a+2b \\ y &=& 3b \\ z &=& 0 \\ t &=& 2a+b \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{lcl} b &=& \dfrac{y}{3} \\ a &=& x - \dfrac{2y}{3} \\ z &=& 0 \\ t &=& 2x - \dfrac{4y}{3} + \dfrac{y}{3} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad z = 0 \text{ et } t = 2x - y.
\end{aligned}$$

(x,y,z,t) appartient donc à E si et seulement si on a $z = 0$ et $t - 2x + y = 0$. On a prouvé ainsi l'égalité suivante :

$$E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } z = t - 2x + y = 0\right\}.$$

MÉTHODE 4 : Trouver une famille génératrice d'un sev

■ **Principe :**

On appelle E l'espace dont on cherche une famille génératrice et on suppose que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel A. On prend un vecteur quelconque de A, on écrit que ses coordonnées doivent vérifier des relations cartésiennes de E pour y appartenir puis on élimine ainsi au fur et à mesure les coordonnées en trop. Et hop, une famille génératrice apparaît !

■ ***Exemple*** **:**

On pose : $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ *tels que* $x+y = 2z - t + x = 0\}$. *Trouver une famille génératrice de* E.

Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} X \in E &\iff \exists\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } X = (x,y,z,t) \text{ et } x+y = 2z-t+x = 0 \\ &\iff \exists\,(y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } X = (-y,y,z,t) \text{ et } 2z-t-y = 0 \\ &\iff \exists\,(y,z) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } X = (-y,y,z,2z-y) \\ &\iff \exists\,(y,z) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } X = y(-1,1,0,-1) + z(0,0,1,2) \\ &\iff X \in \text{ Vect } ((-1,1,0,-1),(0,0,1,2)). \end{aligned}$$

D'où $E = \text{ Vect } ((-1,1,0,-1),(0,0,1,2))$ et $((-1,1,0,-1),(0,0,1,2))$ est une famille génératrice de E.

MÉTHODE 5 : Décrire $E \cap F$

■ **Principe :**
Une évidence, les éléments de E et F sont à la fois dans E et dans F. Il suffit donc de vérifier simultanément toutes les conditions. Si on est dans $\mathbb{K}^n$, le plus simple pour décrire $E \cap F$ est d'avoir des équations cartésiennes de E et de F. Après, il suffit de dire qu'un élément appartient $E \cap F$ s'il vérifie à la fois des équations cartésiennes de E et des équations cartésiennes de F. Il suffit donc de résoudre un gros système linéaire !

■ **Cas particulier :**
Si $E \subset F$ on vous signale que $E \cap F$ est tout simplement E. Il faut y penser quand E ou F est "grand".

MÉTHODE 6 : Trouver la dimension d'un ev

■ **Rappel :**
Quelques dimensions qui sont dans votre cours :

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n, \ \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np \ \text{ et } \ \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1.$$

■ **Principe :**
Quelques idées pour surmonter une telle difficulté :

- **Par une base.**
  Une fois qu'on a trouvé une base d'un espace vectoriel, il suffit de compter pour avoir sa dimension. On rappelle que la dimension d'un espace vectoriel est le nombre d'éléments d'une base quelconque de cet espace.

La difficulté est donc de trouver une base... Le plus simple est de chercher une famille génératrice (donc de décomposer un vecteur quelconque de notre espace sur une famille) et d'extraire une base de cette famille (en éliminant les vecteurs en trop).

- **Par une famille génératrice.**
  Si on obtient une famille génératrice, on peut avoir la dimension sans extraire pour autant une base. Il suffit de calculer (grâce à l'algorithme de Gauss par exemple) le rang de cette famille. C'est par définition la dimension qu'on cherchait.
- **Par le théorème du rang.**
  On interprète notre espace vectoriel E comme étant le noyau d'une application linéaire f partant d'un certain espace vectoriel F qui contient E. On calcule le rang de f puis on invoque le théorème du rang :

$$\dim(F) = \mathrm{rang}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

■ ***Exemple*** **:**

On appelle C l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ (n entier naturel non nul) s'annulant en 4. Evaluer la dimension de C.

On a déjà prouvé que C était un espace vectoriel. On appelle $\mathcal{B}$ la famille suivante :

$$\mathcal{B} = ((X-4), (X-4)^2, \cdots, (X-4)^n).$$

C'est une famille de C, ça, c'est évident ! D'autre part, c'est une famille libre (polynômes de degrés tous distincts) ayant n éléments donc $\dim(C)$ vaut au moins n.
Dautre part, $\dim(C)$ n'est pas $n+1$ (sinon, C serait $\mathbb{R}_n[X]$ puisque C est inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$... et C n'est pas $\mathbb{R}_n[X]$ puisque tous les polynômes ne s'annulent pas en 4). En conclusion, $\dim(C)$ vaut n.
Par le théorème du rang, ça marche très bien ! C est le noyau de l'application linéaire suivante : $\varphi : P \mapsto P(4)$. On a $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (tout réel peut s'écrire sous la forme $P(4)$) donc le rang de φ est 1. On a donc d'après le théorème du rang :

$$\dim(C) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \mathrm{rang}(\varphi) = n.$$

MÉTHODE 7 : Montrer que des sev sont supplémentaires

■ **Principe :**
Pour démontrer que E et F sont supplémentaires dans G, on :

- **En dimension infinie**
  prouve que $E \cap F = \{0_G\}$ et que $E + F = G$, c'est-à- dire que tout x de G peut s'écrire sous la forme $e + f$ avec e un vecteur de E et f un vecteur de F. On peut aussi se contenter de prouver que tout x de G s'écrit de manière unique sous la forme $x = e + f$ avec e un vecteur de E et f un vecteur de F (mais bon, l'unicité ou $E \cap F = \{0_G\}$, c'est la même chose...).

- **En dimension finie**
  commence par prouver que dim(E)+dim$(F) =$ dim(G) (si cette égalité n'est pas vraie alors E et F ne sont pas supplémentaires dans G). Il suffit alors de prouver que $E + F = G$ ou bien que $E \cap F = \{0_G\}$ pour conclure. C'est donc deux fois plus facile qu'en dimension infinie !

■ **Mise en garde :**
Précisez bien dans quel espace vos sous-espaces sont supplémentaires. Si E et F sont supplémentaires dans G alors ils ne le sont pas dans tout espace vectoriel contenant strictement G... Au passage, ne parlez pas **du** supplémentaire ni de **le** supplémentaire de ... car il n'y a pas unicité du supplémentaire (à part G dont le supplémentaire dans G est $\{0_G\}$ et $\{0_G\}$ dont le supplémentaire dans G est G). On dit donc **un** supplémentaire de... Au passage aussi, ne confondez pas complémentaire et supplémentaire, signalons même que le complémentaire d'un espace vectoriel n'est jamais un espace vectoriel (il ne contient même pas le vecteur nul).

■ ***Exemple*** :

Montrer que l'espace des fonctions paires et l'espace des fonctions impaires sont supplémentaires dans l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

L'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ n'étant pas de dimension finie, utilisons la première caractéristique. Prenons f une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}$ et démontrons qu'il existe un unique couple de fonctions (g, h) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que g soit paire, h impaire et $f = g + h$. On va procéder par Analyse-Synthèse :

- **Analyse :**
  Supposons qu'il existe un couple de fonctions (g, h) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que g soit paire, h impaire et $f = g + h$. Soit x un réel, on a alors
  $$f(x) = g(x) + h(x) \text{ et } f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$
  car g est supposée paire et h impaire. On a donc pour tout réel x :
  $$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
- **Synthèse :**
  Montrons que ça marche. On définit les fonctions g et h par : pour tout réel x, on pose $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Soit x un réel, on a $g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$ donc g est paire. Même démarche pour montrer que h est impaire. Et quand on ajoute g et h, on obtient bien f. Et hop, on a l'existence et l'unicité par Analyse-Synthèse.

2. Famille de vecteurs

MÉTHODE 8 : Montrer qu'une famille de vecteurs est libre

■ **Principe :**
Le principe de base est de prendre une partie finie I quelconque de l'ensemble des indices et de supposer qu'il existe des scalaires $(a_i)_{i\in I}$ tels que : $\sum_{i\in I} a_i e_i = 0_E$. On doit alors prouver que nécessairement, pour tout i de I, on a : $a_i = 0$.
En général, il suffit juste de tout développer pour s'en sortir... Quelques techniques plus spécifiques :

- **En dimension finie avec un système**
  Il est usuel d'expliciter les e_i dans une base (intelligemment choisie...), de développer l'équation $\sum_{i\in I} a_i e_i = 0_E$ et d'identifier les coefficients (principe d'identification dû à la liberté de la base utilisée), on obtient alors un système linéaire dont il faut démontrer que la seule solution est : pour tout i de I, on a : $a_i = 0$. Par exemple, dans un espace polynomial, on identifie les coefficients des polynômes (car $(1, X, X^2,...)$ est une famille libre) pour obtenir un système.
- **En dimension finie avec du rang**
  Evaluer un rang pour vous qui maîtrisez l'algorithme de Gauss ne devrait pas vous prendre trop de temps. Si le rang de la famille vaut son nombre d'éléments alors cela signifie que cette famille est libre.
- **Chez les polynômes**
  On peut se ramener au cas précédent si la balade a lieu dans $\mathbb{R}_n[X]$, on identifie alors les coefficients des monômes... Citons un résultat très fréquemment utilisé (et qu'on a d'ailleurs déjà utilisé dans ce chapitre) : toute famille de polynômes non nuls de degrés tous distincts est libre.
- **On a une famille infinie mais dénombrable**
  Essayez, quand vous voulez montrer que les $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille libre, de faire un raisonnement par récurrence, c'est hyper classique !
- **On joue dans les espaces de fonctions**
  Pour tirer des relations simples de l'équation $\sum_{i\in I} a_i e_i = 0_E$, on peut bien sûr identifier en des points particuliers. Il y a souvent mieux à faire, citons entre autres :
  1. Prendre des limites de l'équation.
  2. Dériver cette relation (cela permet souvent d'avoir des termes en moins, on part alors sur une récurrence).
  3. Evaluer un développement limité de $\sum_{i\in I} a_i e_i$ et invoquer l'unicité du développement limité en un point donné.
  4. Utiliser la régularité de $\sum_{i\in I} a_i e_i$ (qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ puisque c'est 0_E), cela permet souvent d'éliminer quelques a_i qui doivent être nuls sous