Chapitre 1

Vocabulaire de la logique et des ensembles

1 Vocabulaire des ensembles

1.1 Premières définitions

Définition 1

- Un ensemble est une collection d'objets. Ces objets sont appelés les éléments de notre ensemble, on dit qu'ils appartiennent à l'ensemble. La propriété x est un élément d'un ensemble E se note $x \in E$. $x \notin E$ signifie que x n'est pas un élément de E.
- L'ensemble n'ayant aucun élément est appelé l'ensemble vide. il est noté $\emptyset$.
- Un ensemble réduit à un seul élément est appelé un singleton, un ensemble réduit à deux éléments est appelé une paire.

✌ **EXEMPLE :**

1. Quelques exemples d'ensembles bien connus, les ensembles de nombres : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \cdots$
2. On a $4 \notin \{1; 2\}$, $2 \in \{2; 3\}$, $2 \notin \{1; \{2\}\}$, $\{2\} \in \{1; \{2\}\}$, $4 + 2i \notin \mathbb{R}$, $4 + 2i \in \mathbb{C}$, $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.

☛ **REMARQUE :**

- Un ensemble n'est pas forcément fini. $\mathbb{N}$, par exemple, n'est pas fini.
- Un ensemble n'est pas forcément écrit avec des éléments rangés dans l'ordre croissant. $\{-2; 5; -3\}$ est un ensemble bien défini.

- Il n'y a pas forcément d'ordre dans un ensemble, $\left\{1+i; 5; \dfrac{1}{2}\right\}$ est un ensemble bien défini.
- Il n'y a pas forcément d'homogénéité dans un ensemble, $\{A(5,6); [1,2], \exp\}$ est un ensemble bien défini.

☛ **REMARQUE :**

Un ensemble est parfaitement défini dès lors qu'on est capable de préciser sans ambiguïté les éléments qui le composent. Il y a plusieurs façons de décrire un ensemble :

- **Définition en extension :**
  On peut définir un ensemble en précisant les objets qui le contiennent. Ainsi, $\{1; 3; 5; 7\}$ est un ensemble parfaitement défini, c'est l'ensemble qui contient les objets 1, 3, 5 et 7.
  Pour donner les objets que contient un ensemble, on peut préciser la forme de ces objets, c'est le cas par exemple de $\{2k+1, k \in \{0; 1; 2; 3\}\}$, on peut le noter aussi $\{2k+1 \text{ avec } k \in \{0; 1; 2; 3\}\}$. Au passage, ces ensembles sont $\{1; 3; 5; 7\}$.
  Lorsque l'ensemble est grand ou infini, on peut utiliser des points de suspension si la logique reliant les objets entourant ces points de suspension est évidente. $\{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$ peut ainsi s'écrire $\{1; 3; 5; \cdots; 15\}$. Par contre, $\{1; 3; \cdots; 27\}$ est ambigu, cela pourrait désigner l'ensemble $\{1; 3; 9; 27\}$ mais aussi l'ensemble $\{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27\}$.
- **Définition en compréhension :**
  On peut aussi le définir par ce qui caractérise ses éléments. C'est le cas par exemple de $\left\{x \text{ entiers impairs tels que } x^2 \in [1; 50]\right\}$ (qui est encore l'ensemble $\{-7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7\}$).

Définition 2

- Soient v et w deux réels tels que $v \leqslant w$, $[v, w]$ est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } v \leqslant x \text{ et } x \leqslant w\}$.
- Soient p et q sont deux entiers tels que $p \leqslant q$, $[\![p, q]\!]$ est l'ensemble $\{x \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p \leqslant x \text{ et } x \leqslant q\}$.
- Soient E un ensemble non vide sur lequel un produit est défini et α un élément de E, αE désigne l'ensemble $\{\alpha x, x \in E\}$.

✌ **EXEMPLE :**

- L'ensemble $[\![-3, 2]\!]$ est l'ensemble $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.
- L'ensemble $3[-1; 2]$ est l'ensemble $[-3; 6]$.
- L'ensemble des entiers pairs se note $2\mathbb{Z}$.
- L'ensemble $\left\{x \in [\![-3, 2]\!] \text{ tels que } x^3 \in [-5; 20]\right\}$ est l'ensemble $[\![-1, 2]\!]$, c'est-à-dire $\{-1; 0; 1; 2\}$.

Définition 3

Soient E et F deux ensembles.

- On dit que E est inclus dans F ou que F contient E ou que E est une partie de F lorsque tous les éléments de E sont en particulier des éléments de F. On note alors que $E \subset F$ ou $F \supset E$.
- On dit que $E = F$ lorsque $E \subset F$ et $F \subset E$, c'est-à-dire lorsque E et F ont exactement les mêmes éléments.

✿ **MÉTHODE :**
Pour montrer l'égalité entre deux ensembles E et F, on procédera souvent par double inclusion, c'est-à-dire qu'on prouvera dans un premier temps que $E \subset F$ puis on démontrera que $F \subset E$. La démonstration $E \subset F$ commencera par un "Soit $x \in E$" et se terminera par "donc x est un élément de F".

✌ **EXEMPLE :**

1. $\{1;2\} \subset \{1;2;\{1;3\}\}$
2. $\{1;2\} \not\subset \{3;2;\{1;3\}\}$
3. $\{1;2\} = \{2;1\}$
4. $\{1;2\} = \{1;2;1\}$

☛ **REMARQUE :**
Il faut savoir distinguer l'appartenance et l'inclusion. Dans l'appartenance, on compare un objet et un ensemble alors que dans l'inclusion, on compare deux ensembles. Prenons par exemple l'ensemble $E = \{1;2;\{1;3\}\}$. On a :

$$1 \in E, \{1;3\} \in E, \{2\} \subset E \text{ et } \{2,\{1;3\}\} \subset E.$$

Par contre, $\{1;3\} \subset E$ est faux.

Définition 4

Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

✌ **EXEMPLE :**
Soit $E = \{1;2;3\}$. $\mathcal{P}(E)$ est $\{\emptyset;\{1\};\{2\};\{3\};\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\};E\}$.

☛ **REMARQUE :**

- L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.
- Si E est un ensemble alors $\mathcal{P}(E)$ contient au moins E et $\emptyset$.
- Soit E un ensemble. On a l'équivalence suivante :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

1.2 Opérations sur les ensembles

Maintenant qu'on a défini très clairement le concept d'ensemble, on va voir comment agir dessus. C'est un principe qu'on retrouvera très souvent en mathématiques : on commence un cours par un nouvel objet mathématique, puis après, on voit les différentes opérations possibles sur cet objet.

Définition 5

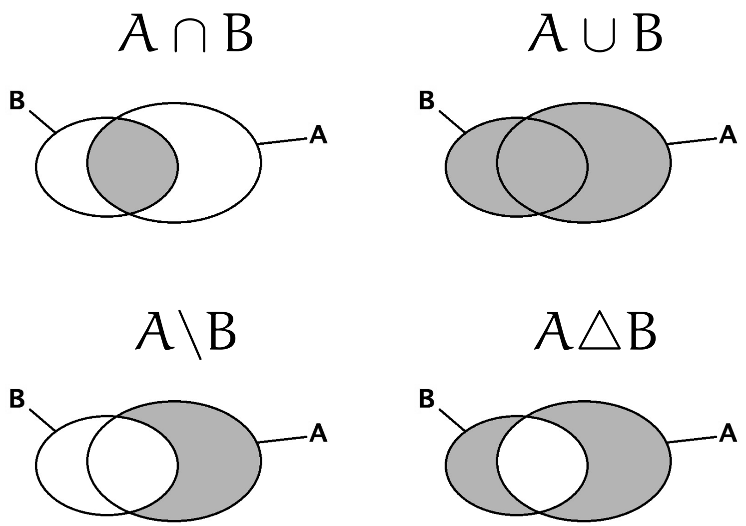
Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On définit les opérations suivantes :

- $A \cap B = \{x \in E$ tels que $x \in A$ et $x \in B\}$. C'est l'intersection de A et B, c'est l'ensemble contenant les éléments appartenant à la fois à A et B.
- $A \cup B = \{x \in E$ tels que $x \in A$ ou $x \in B\}$. C'est l'union de A et B, c'est l'ensemble contenant les éléments appartenant au moins à A ou à B.
- $A \backslash B = \{x \in E$ tels que $x \in A$ et $x \notin B\}$. C'est A privé de B.
- $\bar{A} = \complement_E A = E \backslash A = \{x \in E$ tels que $x \notin A\}$. C'est le complémentaire de A dans E.
- $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.C'est la différence symétrique de A et B, c'est l'ensemble contenant les éléments appartenant exactement à l'un des deux ensembles A et B.

✌ **Exemple :**

1. $[1;11] \cap [2;13] = [2;11]$
2. $[1;11] \cup [2;13] = [1;13]$
3. $\left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \cos(x) = \frac{1}{2}\right\}$ est l'ensemble suivant :
$$\left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]\right\}$$
4. On pose $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 2 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right.\right\}$. On a :
$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x+y=2\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x-y=0\right\} \\ &= \{(1,1)\} \end{aligned}$$
5. $\complement_{\mathbb{R}}(]-\infty;11] \cup]13,19]) =]11,13] \cup]19,+\infty[$.

✎) **ILLUSTRATION :**
On a grisé les parties concernées :



Définition 6

Soit E un ensemble. Soient n un entier naturel non nul et $A_1, \cdots, A_n$ n parties de E. Par récurrence, on définit ensuite :

- $A_1 \cap \cdots \cap A_n$, ensemble noté $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, c'est l'ensemble suivant :

$$\{x \in E \text{ tels que pour tout } i \text{ de } [\![1, n]\!], \text{ on a : } x \in A_i\}.$$

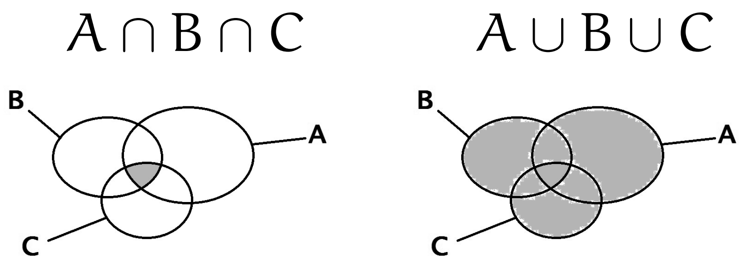
- $A_1 \cup \cdots \cup A_n$, ensemble noté $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, c'est l'ensemble suivant :

$$\{x \in E \text{ tels qu'il existe au moins un } i \text{ de } [\![1, n]\!] \text{ tel que : } x \in A_i\}.$$

✌ **EXEMPLE :**
On pose $A = [-2, 3]$, $B = [-1, 7]$ et $C = \mathbb{Z}$, on a :

$$A \cup B \cup C = \mathbb{Z} \text{ et } A \cap B \cap C = \{-1; 0; 1; 2; 3\}.$$

✎) **ILLUSTRATION :**
On a grisé les parties concernées :



☛ **REMARQUE :**
On peut aussi généraliser les notions de réunion et d'intersection au cas d'une infinité d'ensembles. Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction $\tan$ est :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\right).$$

Proposition 7

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E. On a :

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
6. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

☛ **REMARQUE :**
Reprenons les notations de la dernière proposition.

- Les parties 7 et 8 de cette proposition portent un nom, ce sont les lois de Morgan.
- Comme $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, on note plus simplement $A \cap B \cap C$ cet ensemble.
- Comme $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, on note plus simplement $A \cup B \cup C$ cet ensemble.

☞ **MISE EN GARDE :**

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

- $(A \cap B) \cup C$ et $A \cap (B \cup C)$ ne sont pas les mêmes ensembles, il suffit de faire un dessin pour s'en rendre compte. Il ne faut pas oublier les parenthèses !
- $(A \cup B) \cap C$ et $A \cup (B \cap C)$ ne sont pas les mêmes ensembles, il suffit de faire un dessin pour s'en rendre compte. Il ne faut pas oublier les parenthèses !

➤ ***Exercice*** **:** *Soient* E *un ensemble et* A, B *et* C *trois parties de* E. *Montrer que :*

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

....

Pour prouver cette égalité, on va prouver la double inclusion.

1. Soit x un élément de $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$.
   - **Cas 1 :**
     On suppose que x est dans $A \cap B \cap C$. x est alors en particulier un élément de $A \cap B$.
   - **Cas 2 :**
     On suppose que x n'est pas dans $A \cap B \cap C$. Ainsi, on aura balayé tous les cas possibles, être ou ne pas être (comme dirait William) dans $A \cap B \cap C$. Comme $\overline{A \cap B \cap C}$ est $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ (☞ loi de Morgan), on va distinguer les trois sous-cas suivant :
     - **Sous-cas 1 :** On suppose que x n'est pas dans A. Or x appartient à $A \cup B$, on peut donc affirmer que $x \in B$. On sait aussi que $x \in A \cup C$ donc (même raisonnement) $x \in C$. Bref, dans ce sous-cas, $x \in B \cap C$.
     - **Sous-cas 2 :** On suppose que x n'est pas dans B. On prouve alors que $x \in A \cap C$.
     - **Sous-cas 3 :** On suppose que x n'est pas dans C. Comme vous êtes malins, vous vous doutez que $x \in A \cap B$.

   On a donc recouvert tous les cas, on peut donc affirmer que x est un élément de $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \cup (A \cap B)$ (on fait le bilan de ce qui précède) et donc x est un élément de $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$. On a donc prouvé que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) \subset (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
2. Soit x un élément de $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$. On a trois cas à distinguer :
   - **Cas 1 :**
     On suppose que $x \in A \cap B$. On peut alors affirmer que $x \in A$ donc $x \in A \cup B$ et $x \in C \cup A$. D'autre part, $x \in B$ donc $x \in B \cup C$. Bref dans ce cas, $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.
   - **Cas 2 :**
     On suppose que $x \in A \cap C$. Il se passe alors la même chose, on prouve donc que $x \in Z$ en notant Z l'ensemble $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.
   - **Cas 3 :**
     On suppose que $x \in B \cap C$. Même raisonnement, même conclusion : $x \in Z$.

   On fait maintenant le bilan : Si x appartient à $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ alors $x \in Z \cup Z \cup Z$, bref, $x \in Z$. On a donc prouvé que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$ est inclus dans $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Bilan : Par double inclusion, on a donc prouvé l'égalité souhaitée :

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

On peut faire beaucoup plus simple en utilisant la distributivité :

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B) &= [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cup (C \cap B) \\ &= [A \cap (B \cup C)] \cup (B \cap C) \\ &= [A \cup (B \cap C)) \cap ((B \cup C) \cup (B \cap C)) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{aligned}$$

Définition 8

- On dit que deux ensembles sont disjoints si leur intersection est vide.
- Soient E un ensemble et $A_1, \cdots, A_n$ n (n entier naturel non nul) parties de E. On dit que $\{A_1, \cdots, A_n\}$ est une partition de E si les trois conditions suivantes sont vérifiées :
  1. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $A_i \neq \emptyset$.
  2. Pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
  3. Pour tout $x \in E$, il existe i dans $[\![1, n]\!]$ tel que $x \in A_i$.

✌ **EXEMPLE :**

$[-1, 10]$ et $]10, 100]$ sont disjoints. $[-1, 10]$ et $[9, 100]$ ne sont pas disjoints.

✌ **EXEMPLE :**

1. Voici quelques partitions possibles de $[\![-2, 5]\!]$:
   - $\{[\![-2, 3]\!], \{4\}, \{5\}\}$.
   - $\{\{-2; -1; 3; 4\}, \{0; 1; 2; 5\}\}$.
   - $\{\{-2; -1; 3; 4\}, \{1; 2\}, \{0; 5\}\}$.
2. Voici quelques ensembles qui ne sont pas des partitions possibles de $[\![-2, 5]\!]$:
   - $\{[\![-2, 3]\!], \{4; -1\}, \{5\}\}$. Ce n'est pas une partition de $[\![-2, 5]\!]$ car $[\![-2, 3]\!]$ et $\{4; -1\}$ ne sont pas disjoints.
   - $\{[\![-2, 3]\!], \{4\}, \{5\}, \emptyset\}$. Ce n'est pas une partition de $[\![-2, 5]\!]$ car il y a $\emptyset$ dans cet ensemble.
   - $\{[\![-1, 3]\!], \{4\}, \{5\}\}$. Ce n'est pas une partition de $[\![-2, 5]\!]$ car -2 est un élément de $[\![-2, 5]\!]$ et il n'appartient pas à $[\![-1, 3]\!] \cup \{4\} \cup \{5\}$.
   - $\{[\![-5, 3]\!], \{4\}, \{5\}\}$. Ce n'est pas une partition de $[\![-2, 5]\!]$ car -5 n'est pas un élément de $[\![-2, 5]\!]$ et il appartient à $[\![-5, 3]\!] \cup \{4\} \cup \{5\}$.
3. Si E est un ensemble non vide, $\{E\}$ et $\{\{x\}, x \in E\}$ sont deux partitions de E.
4. Si E est un ensemble non vide, A et B deux parties de E non vides et disjointes alors $\{A, \overline{A}\}$, $\{B, \overline{B}\}$ et $\{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\}$ sont trois partitions de E.