Chapitre **1**

Suites numériques (1^{re} partie)

I Prérequis

I.1 Définition d'une suite

Définition.
Une *suite numérique* est une liste de nombres réels « numérotés » par les nombres entiers naturels.

On peut lui associer une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{R} \\ n \mapsto & u(n) \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, $u(n)$, noté u_n, est le terme de rang n de la suite.
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou plus simplement (u_n), la suite qui est constituée de l'ensemble de ces termes.

Remarque : On peut définir une suite de deux manières différentes :
- explicitement, en exprimant u_n en fonction de n. Par exemple, $u_n = 2n^2 + 1$;
- à l'aide d'une relation récurrence liant deux (ou plus) termes consécutifs de la suite. Par exemple : $v_0 = -5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 4$.

Exemple : Déterminer à la main les premiers termes des suites définies ci-dessous.

(a) la suite (u_n) est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n^2 + 1$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 \times 0^2 + 1 = 1$
Pour $n = 1$, on a $u_1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3$
Pour $n = 2$, on a $u_2 = 2 \times 2^2 + 1 = 9$
Pour $n = 3$, on a $u_3 = 2 \times 3^2 + 1 = 19$

(b) la suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + 4 \end{cases}$

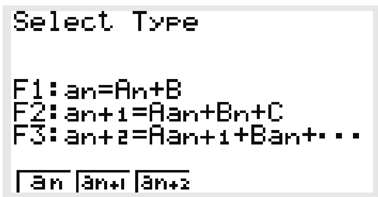
Pour $n = 0$, on a $v_1 = v_0 + 4 = -5 + 4 = -1$
Pour $n = 1$, on a $v_2 = v_1 + 4 = -1 + 4 = 3$
Pour $n = 2$, on a $v_3 = v_2 + 4 = 3 + 4 = 7$
Pour $n = 3$, on a $v_4 = v_3 + 4 = 7 + 4 = 11$

(c) la suite (w_n) est définie par $\begin{cases} w_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n + n \end{cases}$

Pour $n = 0$, on a $w_1 = w_0 + 0 = 2 + 0 = 2$
Pour $n = 1$, on a $w_2 = w_1 + 1 = 2 + 1 = 3$
Pour $n = 2$, on a $w_3 = w_2 + 2 = 3 + 2 = 5$
Pour $n = 3$, on a $w_4 = w_3 + 3 = 5 + 3 = 8$

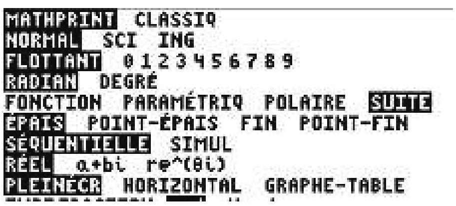
I.2 Utilisation de la calculatrice

1. Si la suite est définie de manière explicite,
   - Sur CASIO,
     (a) Aller dans le menu RECUR.
     (b) Aller dans TYPE ($\boxed{F3}$) puis sélectionner $\boxed{F1}$ (pour avoir a_n en fonction de n).

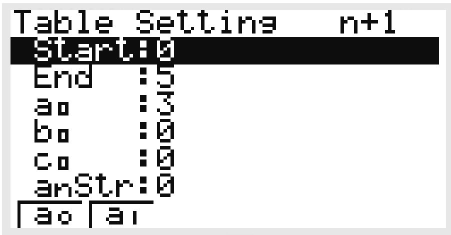


     (c) Le menu SET permet de choisir les rangs de début et de fin.

   - Sur TI,
     (a) Appuyer sur $\boxed{MODE}$ et choisir l'option SUITE (ou SEQ).
     (b) Appuyer sur $\boxed{f(x)}$.
     (c) Définir la suite dans la ligne $u(n)$.
     (d) nMin correspond au rang auquel commence la suite.



2. Si la suite est définie par une relation de récurrence,
   - Sur CASIO,
     (a) Aller dans le menu RECUR.
     (b) Aller dans TYPE ($\boxed{F3}$) puis sélectionner $\boxed{F2}$ (pour avoir a_{n+1} en fonction de a_n).
     (c) Le menu SET permet de régler la valeur de a_0 (ou a_1).



   - Sur TI,
     (a) Après avoir sélectionné le mode SEQ, appuyer sur $\boxed{f(x)}$.
     (b) ⚠Il faut définir u_n en fonction de u_{n-1}.
     (c) $u(n-1)$ est obtenu grâce aux touches $\boxed{2nde}$ puis $\boxed{7}$.
     (d) Il faut définir nMin (rang de départ) et u(nMin) (terme initial).

Exemple : Vérifier, à l'aide de la calculatrice, les premiers termes des suites définies dans l'exemple précédent (I.1).

I.3 Sens de variations

Définitions. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- On dit que (u_n) est *croissante* lorsque, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- On dit que (u_n) est *décroissante* lorsque, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- On dit que (u_n) est *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- On dit que (u_n) est *constante* lorsque, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.

Dans la pratique, comment montrer qu'une suite est croissante (ou décroissante) ? Les trois propriétés ci-dessous correspondent à trois méthodes différentes.

Propriété. (Signe de la différence)
Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1 \end{cases}$
Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geqslant 0$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

Propriété. (Comparer le quotient à 1)
Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple : Soit (v_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (n+1) \times 3^n$.
Étudier les variations de la suite (v_n).

Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+2) \times 3^{n+1}}{(n+1) \times 3^n} = \dfrac{n+2}{n+1} \times 3$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+2 \geqslant n+1$, donc $\dfrac{n+2}{n+1} \geqslant 1$ (car $n+1 > 0$). Ainsi, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 3 \geqslant 1$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geqslant v_n$. La suite (v_n) est donc croissante.

Remarque : On peut énoncer la propriété analogue (hors programme) lorsque la suite (u_n) à termes strictement négatifs.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante.

Propriété. (Pour les suites définies de manière explicite)
Soit f la fonction telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple : Soit (w_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = n^2 + 4n$.
Étudier les variations de la suite (w_n).

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 4x$. On a alors $u_n = f(n)$.
On peut calculer la dérivée de f et on obtient : $f'(x) = 2x + 4$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$		$\nearrow$	

En particulier, la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$, ce qui implique que la suite (u_n) est croissante.

I.4 Suites arithmétiques

Définition. Une suite est *arithmétique* lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, appelé raison de la suite, noté r.
Autrement dit, (u_n) est une suite arithmétique de raison r si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété.
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$.

Propriété. On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r.
Soit S la somme de termes consécutifs de la suite.

$$S = \text{nombre de termes de } S \times \frac{\text{1er terme de } S \ + \ \text{dernier terme de } S}{2}$$

Exemple : Calculer $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 99 + 101$.

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.
On constate que $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$. En effet, on a bien $101 = 1 + 50 \times 2$.
Cette expression est donc la somme de 51 termes consécutifs d'une suite arithmétique.
On a donc $S = 51 \times \dfrac{1 + 101}{2} = 2601$.

Remarque : De manière générale, on peut écrire la relation entre deux termes quelconques d'une suite arithmétique de raison r.

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_p = u_n + r(p-n)$$

I.5 Suites géométriques

Définition. Une suite est *géométrique* lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre, appelé raison de la suite, noté q.
Autrement dit, (u_n) est une suite géométrique de raison q si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$$

Propriété.
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété. On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0.
Soit S la somme de termes consécutifs de cette suite.

$$S = \text{premier terme de } S \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes de } S}}{1-q}$$

Exemple : Exprimer $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$ en fonction de n.

On considère la suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.
On constate que $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Cette expression est donc la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique.
Ainsi, $S = 1 \times \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$.

Remarque : De manière générale, on peut écrire la relation entre deux termes quelconques d'une suite géométrique de raison q.

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_p = u_n + q^{p-n}$$

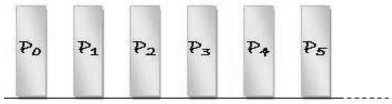
Exemple : On considère la suite géométrique (u_n) de raison q telle que $u_5 = 4$ et $u_7 = 36$. Déterminer les valeurs possibles de la raison q.

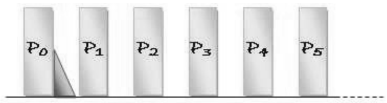
On applique la relation de la remarque précédente avec $p = 7$ et $n = 5$. On obtient alors $u_7 = u_5 \times^{7-5}$, soit $36 = 4 \times q^2$. Ainsi, q vérifie l'équation $q^2 = 9$.
On en déduit que q peut prendre deux valeurs possibles : 3 et -3.

II La démonstration par récurrence

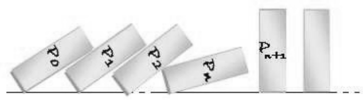
II.1 Le principe de récurrence

Supposons que nous avons placé les dominos comme sur l'image. Comment les faire tous tomber ?





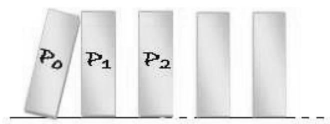
Comme le premier domino ne tombe pas, aucun domino ne tombera.



Ici les dominos ne tomberont pas tous puisque pour une certaine valeur de n, l'enchaînement $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ ne se fera pas !

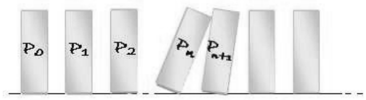
Donc pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n, il faudra procéder en deux étapes et conclure.

(a) *Première étape (initialisation) :*
On vérifie que P_0 (c'est-à-dire la propriété pour $n = 0$) est vraie.



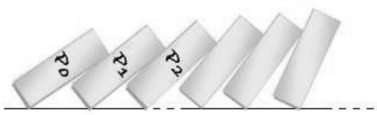
Le premier domino P_0 tombe bien.

(b) *Deuxième étape (hérédité) :*
On vérifie le caractère héréditaire ($P_n \Longrightarrow P_{n+1}$) de la proposition.
On suppose que pour un entier naturel n quelconque P_n est vraie, et en tenant compte de cette hypothèse (appelée hypothèse de récurrence), on démontre que P_{n+1} est également vraie.



Le domino P_n « entraîne » bien le domino P_{n+1}.

(c) *Conclusion :* On conclut que P_n est vraie pour tout entier naturel n.



Le premier domino tombe, et par hérédité, entraîne la chute du 2^{e}, qui entraîne la chute du 3^{e}, etc. Tous les dominos tombent !

II.2 Exemples

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3. \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+2} + 3$.

On appelle P_n la propriété « $u_n = 2^{n+2} + 3$ ».

▲ *Initialisation :* Vérifions la propriété pour $n = 0$:
Nous savons que $u_0 = 7$ et $2^{0+2} + 3 = 4 + 3 = 7$.
Ainsi, la propriété P_0 est vraie.

▲ *Hérédité :*
Supposons que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n = 2^{n+2} + 3$.
Montrons que la propriété P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2^{n+3} + 3$.

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} & = & 2u_n - 3 & \\ & = & 2(2^{n+2} + 3) - 3 & \text{en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\ & = & 2 \times 2^{n+2} + 2 \times 3 - 3 & \\ & = & 2^{n+3} + 6 - 3 = 2^{n+3} + 3 & \end{array}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

▲ *Conclusion :* Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+2} + 3$.

Exemple 2 : On définit : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

On appelle P_n la propriété « $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

▲ *Initialisation :* Vérifions la propriété pour $n = 1$:
Nous savons que $S_1 = 1$ et $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. Ainsi, la propriété P_1 est vraie.

▲ *Hérédité :*
Supposons que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Montrons que la propriété P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que
$S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+1+1)}{2}$, soit $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.