CHAPITRE 1

QUELQUES MÉTHODES POUR BIEN COMMENCER !

Voilà un tout petit chapitre pour bien commencer l'année comme l'annonce si bien son titre !
Disons qu'il s'agit d'une simple mise au point sur :
- les raisonnements les plus classiques (un poil de récurrence, un peu de logique)
- les ensembles et les applications (à dose homéopathique !)

Autant dire que les méthodes que l'on va développer dans ce chapitre seront régulièrement réinvesties tout au long de ce livre ! Au boulot les enfants !

1. Un peu de logique !

Un peu de logique, cela ne fait jamais de mal !

A) Les récurrences

MÉTHODE 1 : La récurrence classique

■ **Cas d'utilisation :**
Dès qu'on voit une propriété dépendant d'un entier, on peut se poser la question de la récurrence. Ainsi, une question commençant par "Montrer que pour tout entier naturel n, on a ... " sent fortement la récurrence !
Attention, avant de vous lancer dans une récurrence, essayez toujours le calcul direct (c'est-à-dire prouver directement votre propriété en utilisant une proposition du cours ou en effectuant un calcul) qui a l'avantage d'être plus rapide ! Si le calcul direct n'aboutit pas et qu'on peut enchaîner logiquement $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n)$ apporte une information cruciale sur $\mathcal{P}(n+1)$) alors on peut envisager une récurrence.
On retrouvera souvent ce raisonnement tout au long de ce livre. Notez par avance un certain nombre de cas classiques où les récurrences interviendront :
- **Suites :** Très très souvent ! Notamment lors de la recherche du terme général ou pour des histoires de croissance...
- **Dérivabilité :** Typiquement quand on veut calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction.
- **Intégration :** Quand on a une suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on veut expliciter. Il est alors classique de mêler intégration par parties et récurrence : On s'en régale d'avance !

- **Matrices :** La récurrence intervient surtout pour le calcul de la puissance $n^{ième}$ des matrices.
- **Polynômes :** Quand on a une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on veut évaluer le degré ou la parité... De nouveau, on s'en sort par récurrence !
- **Probabilité :** La récurrence peut intervenir en proba quand on étudie une expérience qui se passe en plusieurs étapes et qu'on a besoin de savoir ce qui s'est passé avant pour pouvoir parler de la $n^{ième}$ étape (n tirages sans remise par exemple).

Vous voyez, cela sert de savoir récurrer !

■ **Principe :**

On souhaite démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n est vraie au-delà d'un certain entier n_0. Pour démontrer $\mathcal{P}(n)$ par récurrence, il faut respecter scrupuleusement ces différentes étapes :

- **Etape 1 : L'introduction.**
  On énonce clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$ que l'on va démontrer.
- **Etape 2 : L'initialisation.**
  On démontre que notre propriété est vraie au rang n_0. Ce n_0 est le plus petit élément pour lequel on veut prouver notre propriété. Si on veut la prouver sur $\mathbb{N}$, n_0 est 0. Si on veut la prouver sur $\mathbb{N}^*$, n_0 est 1...
- **Etape 3 : L'hérédité.**
  On prouve que notre propriété est héréditaire. Cela veut dire qu'on la suppose vraie pour un certain rang n avec n un entier supérieur ou égal à n_0 et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.
- **Etape 4 : La conclusion.**
  On dit alors que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie et, pour tout entier naturel n supérieur à n_0, $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$. $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n supérieur à n_0 d'après le principe de récurrence.

■ **Mise en garde :**

Quelques erreurs classiques :

- Démontrer par récurrence une propriété dépendant d'un réel non entier (ou d'un complexe non entier) : Cela ne veut rien dire ! ! !
- Oublier l'initialisation : Ne pas la faire du tout ou alors supposer $\mathcal{P}(n_0)$ vraie ou alors se contenter d'écrire $\mathcal{P}(n_0)$ sans la prouver. A ce moment là, même si l'initialisation est simple, votre raisonnement ne vaut rien du tout. Ne méprisez pas l'initialisation, elle peut vous donner une idée sur la façon dont vous allez relier $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$.
- Démontrer $\mathcal{P}(n+1)$ en supposant $\mathcal{P}(n+1)$ vraie ! Autant dire que vous n'avez pas alors fait grand chose ! Cela vous arrive ouvertement quand vous utilisez $\mathcal{P}(n+1)$ lors du passage $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Mais cela vous arrive aussi de manière plus subtile quand, lors de l'hérédité, vous ne supposez pas $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain rang n mais pour tout entier n supérieur à n_0 ou à partir d'un certain entier n supérieur à n_0. Dans ces deux cas, vous supposez en particulier $\mathcal{P}(n+1)$ vraie ! La différence est donc de taille !
- Démontrer $\mathcal{P}(n+1)$ sans utiliser le fait que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Cela signifie qu'un calcul direct aurait suffi ! Ce n'est pas une d'erreur mais une maladresse qui vous a fait perdre du temps !
- Ecrire $\mathcal{P}(n)$ est la proposition "Pour tout n entier naturel, blabla..." à la place de : Pour tout n entier naturel, $\mathcal{P}(n)$ est la proposition "blabla...".
- Démontrer une proposition indépendante de n comme "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante". Pour démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante par récurrence,

on introduit, pour tout n entier naturel, $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$u_n \leqslant u_{n+1}$".

■ ***Exemple* :**

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k < n$. Montrer que :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k < n$. Comme $(k+1)! = (k+1)\times k!$ et $(n-k)! = (n-k)\times(n-k-1)!$, en mettant au même dénominateur, on obtient que :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{n!(n-k+k+1)}{(k+1)!((n+1)-(k+1)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1)!}\\ &= \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

Voici un premier exemple de proposition dépendant d'entiers et se démontrant sans récurrence. Au passage, c'est le lemme de Pascal. J'espère que vous avez fait un calcul direct comme on vous l'avait recommandé ! Bon, on ne se vexe pas et on passe à la suite !

■ ***Exemple* :**

Soit n un entier naturel. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k) = n(n+1)$.

Respectons les différentes étapes et on s'en sortira très bien :

- **Introduction :**
  Pour tout n entier naturel, on appelle $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"} \sum_{k=0}^{n}(2k) = n(n+1) \text{"}$$

- **Initialisation :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(2k) = 0$ et $0(0+1) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(2k) = 0(0+1)$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(2k) &= 2(n+1) + \sum_{k=0}^{n}(2k)\\ &= 2(n+1) + n(n+1) \text{ d'après } \mathcal{P}(n)\\ &= (n+1)((n+1)+1)\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

- **Conclusion :**
  $\mathcal{P}(0)$ est vraie et, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$. $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence.

MÉTHODE 2 : Autres récurrences

■ **Principe :**

Dans une récurrence, le principe est toujours le même. Il faut que votre processus vous permette de décrire tous les entiers pour lesquels vous souhaitez démontrer que votre propriété est vraie. On s'explique. Quand vous prouvez :

$$\mathcal{P}(0) \text{ est vraie et } \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

alors vous avez bien prouvé que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. En effet, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(0) \Rightarrow \mathcal{P}(1)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2)$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie et on poursuit cet infernal processus !

Deux récurrences (à part la classique bien sûr) qu'on retrouvera assez fréquemment :

1. **La récurrence forte.**

   Au passage, on vous signale que la récurrence qu'on a qualifiée de classique dans la première méthode est qualifiée de faible. La récurrence "forte" marche ainsi :
   - **Etape 1 : L'introduction.**
     Même étape que pour la récurrence faible.
   - **Etape 2 : L'initialisation.**
     Même étape que pour la récurrence faible.
   - **Etape 3 : L'hérédité.**
     On fixe n un entier supérieur ou égal à n_0. On ne suppose plus $\mathcal{P}(n)$ vraie mais, cette fois-ci, on suppose que $\mathcal{P}(n_0)$, $\mathcal{P}(n_0+1)$, ..., $\mathcal{P}(n)$ sont toutes vraies. On essaye alors de démontrer $\mathcal{P}(n+1)$.
   - **Etape 4 : La conclusion.**
     On dit alors que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et, pour tout entier n supérieur à n_0, $\mathcal{P}(n_0), \cdots, \mathcal{P}(n)$ impliquent $\mathcal{P}(n+1)$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur à n_0 d'après le principe de récurrence forte.

   Ceux qui n'ont pas vu la différence feraient bien de se concentrer : Et si vous vous déconnectiez de Facebook une petite heure ?

2. **La récurrence double.**

   This is la démarche pour les récurrences doubles :
   - **Etape 1 : L'introduction.**
     Même étape que pour la récurrence faible.
   - **Etape 2 : L'initialisation.**
     On démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies. Tiens, ça change un peu !
   - **Etape 3 : L'hérédité.**
     On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour un certain entier n supérieur à n_0 et on montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est alors vraie.

- **Etape 4 : La conclusion.**
On dit alors que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies et que, pour tout entier n supérieur à n_0, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$, $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie pour tout entier n supérieur à n_0 d'après le principe de récurrence double.

On peut s'amuser à décrire les processus pour vérifier que nos récurrences marchent bien. Faisons-le pour une récurrence double (vous êtes assez grands pour faire de la même façon la description d'une récurrence forte). Si on s'amuse à décrire l'algorithme pour s'assurer que notre preuve est valable pour tous les entiers naturels, cela donne (en supposant $n_0 = 0$ ce qui ne change pas grand chose...) : $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies et $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2)$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie. $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies et $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2) \Rightarrow \mathcal{P}(3)$ donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie et on poursuit ce processus !

■ **Cas d'utilisation :**
Par rapport à la récurrence classique, on fait une récurrence à notre sauce quand la récurrence classique échoue. Pour la double, c'est quand on a besoin de $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ pour avoir suffisament d'information pour démontrer $\mathcal{P}(n+2)$. Pour la forte, c'est quand on a besoin de $\mathcal{P}(n_0), \cdots, \mathcal{P}(n)$ pour envisager $\mathcal{P}(n+1)$ et qu'on ne parvient pas, juste avec $\mathcal{P}(n)$, à démontrer $\mathcal{P}(n+1)$.

■ ***Exemple*** **:**

Soit a un réel. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 2\cos(a) \ \textit{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2\cos(a)u_{n+1} - u_n.$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2\cos(na)$.

Pour tout entier naturel n, on appelle $\mathcal{P}_n$ l'hypothèse :

$$"u_n = 2\cos(na)".$$

$u_0 = 2$ et $2\cos(0 \times a) = 2$, $\mathcal{P}_0$ est donc vraie. $u_1 = 2\cos(a)$ et $2\cos(1 \times a) = 2\cos(a)$, $\mathcal{P}_1$ est donc vraie.
On suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies pour un certain entier naturel n. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2\cos(a)u_{n+1} - u_n \\
&= 2\cos(a) \times 2\cos((n+1)a) - 2\cos(na) \text{ d'après } \mathcal{P}_n \text{et } \mathcal{P}_{n+1} \\
&= 4\cos(a)\left(\cos(na)\cos(a) - \sin(na)\sin(a)\right) - 2\cos(na) \\
&= 2(2\cos^2(a) - 1)\cos(na) - 4\cos(a)\sin(a)\sin(na) \\
&= 2\cos(2a)\cos(na) - 2\sin(2a)\sin(na) \\
&= 2\cos((2+n)a)
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie si $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ le sont.
$\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies et pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ impliquent $\mathcal{P}_{n+2}$. $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence (double si on veut se la jouer un peu !).

■ ***Exemple*** **:**

On définit la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *par :*

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} u_k.$$

Soit n *un entier naturel non nul, vérifiez que* $u_n = 2^{n-1}$.

Pour tout n entier naturel non nul, on appelle $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \text{" } u_n = 2^{n-1} \text{ "}$$

Comme $u_1 = u_0$, on a $u_1 = 1$. Or $2^{1-1} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Soit m un certain entier naturel non nul. on suppose que $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, ..., $\mathcal{P}(m)$ sont toutes vraies On a :

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= \sum_{k=0}^{m} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{m} u_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} \text{ d'après } \mathcal{P}(1), \cdots, \mathcal{P}(m) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} 2^{k} \text{ avec un p'tit changement de variable !} \\ &= 1 + \frac{1-2^m}{1-2} \text{ (cf cours sur les suites géométriques)} \\ &= 2^m \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(m+1)$ est donc vraie si $\mathcal{P}(1), \cdots, \mathcal{P}(m)$ le sont. $\mathcal{P}(1)$ est vraie et, pour tout entier n naturel non nul, $\mathcal{P}(1)$, $\cdots$, $\mathcal{P}(n)$ impliquent $\mathcal{P}(n+1)$. $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n non nul d'après le principe de récurrence forte.

B) Absurde et Contraposée

MÉTHODE 3 : Comment exprimer $\bar{P}$

On signale qu'on note $\bar{P}$ la proposition "non P", c'est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

■ **Rappel :**
Soient P et Q deux propositions. Voici les propriétés que l'on va utiliser tout le temps :

$\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$ $\quad\overline{P \text{ ou } Q} = \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$ $\quad\overline{P \Longrightarrow Q} = P \text{ et } \overline{Q}$

Voici celles concernant les quantificateurs :

$\overline{\forall} = \exists$ $\qquad\qquad$ $\overline{\exists} = \forall$

On rappelle aussi que :
- $(P$ et $Q)$ vraie veut dire que les proprositions P et Q sont toutes les deux vraies.
- $(P$ ou $Q)$ vraie veut dire qu'au moins une des deux proprositions P et Q est vraie (les deux éventuellement !).

■ **Principe :**
On souhaite nier une proprosition P, cela signifie qu'on cherche une proprosition Q telle que si Q est vraie alors P est fausse et si Q est fausse alors P est vraie. Pour exprimer cette proposition, on va décomposer P (avec des "ou", des "et" et des implications) en proprositions élémentaires et se servir du rappel juste au-dessus. On va donc remplacer les ou par des et, les et par des ou, les "Pour tout" par des "Il existe" et les "Il existe" par des "Pour tout".

■ **Mise en garde :**

1. Réfléchissez bien ! Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le contraire de f est paire n'est pas f est impaire (une fonction peut être ni paire ni impaire) mais il existe un réel x tel que $f(x) \neq f(-x)$ puisque f paire s'écrit :

   Pour tout réel x, on a : $f(x) = f(-x)$.

   Dans le même genre, le contraire de f croissante n'est pas f décroissante, le contraire de f positive n'est pas f négative...
2. Si vous donne une proposition valable pour des x positifs, ne les remplacez pas par des réels négatifs pour nier votre proposition. Sinon, vous vous intéressez à des éléments différents et cela ne contredit absolument pas la proposition d'origine, vous parlez tout simplement d'autre chose !

■ ***Exemple* :**

Nier les propositions suivantes :

1. *Tous les habitants de la rue Pirandello qui portent des lunettes ou des chapeaux sont des grands mathématiciens et auront un bon point avant 30 ans.*
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$.

1. La proposition "Tous les habitants de la rue Pirandello qui portent des lunettes ou des chapeaux sont des grands mathématiciens et auront un bon point avant 30 ans "peut s'écrire avec des connecteurs logiques :

   $\forall$ habitants de... chapeaux $\Rightarrow$ matheux et bon point

   On nie en utilisant le rappel, ça donne donc : Il existe un habitant de la rue Pirandello qui porte des lunettes ou des chapeaux qui n'est pas un grand mathématicien ou qui n'aura pas de bon point avant 30 ans. Si vous dites que cela donne Il existe un habitant de la rue Pirandello qui ne porte pas des lunettes et pas de chapeaux non plus qui n'est pas un grand mathématicien ou qui n'aura pas de bon point avant 30 ans, vous commettez une belle faute de logique car vous énoncez une proposition compatible avec celle d'origine puisque que vous ne parlez pas de la même catégorie de gens : Il se peut que, dans les habitants de la rue Pirandello, ceux qui portent des lunettes ou des chapeaux soient des grands mathématiciens et aient un bon point avant 30 ans et que, parmi les autres, i.e. (pour id est, cela signifie c'est-à-dire chez Virgile et c'est toujours très classe de parler une langue morte) parmi ceux qui ne portent ni lunettes ni chapeaux, il y ait un pas grand mathématicien ou un n'ayant pas de bon point avant 30 ans...Capiche ? Sinon, re(ou rere)lisez ce paragraphe à haute voix !

2. La négation de $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$ est :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star \text{ tel que } \forall n_0, \exists n \in \mathbb{N} \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant n_0 \text{ et } |U_n - l| \geqslant \varepsilon$$

De nouveau, si vous avez mis $\varepsilon \leqslant 0$ ou $n < n_0$, vous ne parlez pas de la même catégorie !

MÉTHODE 4 : L'absurde

■ **Principe :**
Soient P et Q deux propositions. On sait que P est vraie. On souhaite démontrer que Q est vraie. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer Q fausse i.e. $\overline{Q}$ vraie. Le but est d'aboutir à une contradiction. On pourra alors conclure que l'hypothèse Q fausse est une hypothèse fausse, ce qui signifie que Q est vraie.

■ **Remarque :**
Dans un raisonnement par l'absurde comme dans un raisonnement par contraposée, on a besoin d'être capable d'énoncer la propriété "non Q" en connaissant Q. Comment faire ? Et bien relisez la précédente méthode, on vous a bien prémaché le boulot : Bon appétit !

■ **Cas d'utilisation :**
On est tenté (à juste titre) par un raisonnement par l'absurde quand la proposition $\overline{Q}$ est exploitable. Par exemple, si Q est "x est irrationnel" alors $\overline{Q}$ est bien pratique car alors, si on suppose $\overline{Q}$, on peut affirmer que x est rationnel et l'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ puis se lancer dans des calculs...